

变量控制图

概述

控制图用于定期监视过程，以确定该过程是否在控制范围内。Minitab 协助包含两个用于连续数据的使用最广泛的控制图：

- \bar{X} -R 或 \bar{X} -S 控制图。在收集子组中的数据时，可使用这两个控制图。Minitab 使用合并标准差来估计子组内标准差。R 控制图为数量最大达到 10 的子组提供有效的变异估计值 (AIAG, 1995; Montgomery, 2001)。对于更大的子组大小，S 控制图提供各个子组内标准差的更佳估计值。为了遵循 Minitab 过去的惯例，并且保守一些，我们建议在子组大小大于 8 时使用 S 控制图。对于小于或等于 8 的子组大小，R 和 S 控制图可提供类似结果。
- 单值移动极差 (I-MR) 控制图。在没有子组时，使用此控制图。Minitab 使用长度为 2 的平均移动极差方法来估计标准差。

控制图的控制限通常在六西格玛项目的控制阶段确定。好的控制图应该足够敏感，以便快速指出何时存在特殊原因。可通过计算指出特殊原因所需的平均子组数来评估此敏感度。此外，过程在控制范围内时，好的控制图很少发出“误报”信号。当过程在控制范围内时，可以通过计算被认为“失控”的子组百分比来评估误报率。

通常，当每个观测值来自正态分布，每个观测值都是独立的，并且子组内仅存在普遍原因导致的变异性时，表明控制图已经过优化。因此，“协助”的“报告卡”会自动执行以下数据检查以评估这些条件：

- 正态性
- 稳定性
- 数据量
- 相关数据

在本白皮书中，我们调查了当这些条件发生变化时变量控制图的行为方式，我们还介绍了如何确定用于评估这些条件的要求的一组指导原则。

数据检查

正态性

控制图并不基于过程数据呈正态分布的假设，但特殊原因检验中使用的条件基于此假设。如果数据严重偏斜，或如果太多的数据位于分布结尾处（“重尾”），则检验结果可能不准确。例如，此控制图发出的误报比预期高。

目标

我们调查了非正态数据对 \bar{X} 控制图和 I 控制图的影响。我们想要确定非正态性如何影响误报率。尤其是，研究过程误报的比率，即过程实际处于控制范围内但控制图指示却是数据点失控的比率，我们想要确定非正态数据是否会显著提高这个比率。

方法

我们利用 10,000 个子组 and 不同水平的非正态性进行了相关模拟，并记录了误报百分比。模拟允许我们检验各种条件，以确定非正态性影响。我们选择了右偏斜分布和带有重尾的对称分布，因为这些分布实际上是非正态分布的常见情况。有关详细信息，请参见附录 A。

结果

XBAR 控制图（子组大小大于等于 2）

我们的模拟显示，如果子组大小为 2 或更大，当数据呈非正态分布时，误报率不会显著增大。根据此结果，我们没有检查 \bar{X} -R 或 \bar{X} -S 控制图的正态性。甚至在数据高度偏斜或极度重尾时，检验 1 和检验 2 的误报率也小于 2%，这并不明显高于正态分布的误报率 0.7%。



I 控制图（子组大小 = 1）

我们的模拟显示，I 控制图对非正态数据敏感。当数据是非正态数据时，I 控制图产生的误报率比数据是正态数据时的误报率高 4 到 5 倍。为解决 I 控制图对非正态数据的敏感度问题，“协助”进行了以下操作：

- 如果数据中超出控制限制的实际点数出现了大于预期数据点数（即总共超过两个数据点或高于总点数的 2% 位于控制限之外）情况时，数据显示是高度非正态，“协助”将表示，请执行 Anderson-Darling 检验。
- 如果 Anderson-Darling 检验表明数据是非正态数据，则“协助”将使用最优 Box-Cox lambda 变换数据。对变换数据执行 Anderson-Darling 检验。如果此检验未能否定原假设（即数据是正态数据），则“协助”会在过程自然形成非正态数据时建议使用变换数据。

Box-Cox 变换仅对右偏斜的非正态数据有效。如果此变换对非正态数据无效，则可能需要考虑其他选项。此外，由于 Anderson-Darling 检验和 Box-Cox 变换都极易受极端观测值影响，应该在变换数据之前把已知有特殊原因的数据点先略去。

在检查正态性时，“协助”的 I 控制图“报告卡”会显示以下状态指示符：

状态	条件
	如果 I 控制图上有不到 2 个数据点或不到总点数 2% 的数据点在控制限之外 或 原数据或 Box-Cox 变换数据的 Anderson-Darling 正态性检验都未能在 $\alpha = 0.01$ 下否定原假设（即数据为正态数据）。
	如果不满足上述条件。

稳定性

对于变量控制图，可执行八种检验，以评估过程的稳定性。同时使用这些检验可提高控制图的敏感度。但是，必须确定每个检验的目的和对敏感度的增值，因为误报率会随着控制图中增加的检验数而提高。

目标

我们想要确定，八种稳定性检验中的哪种检验随变量控制图一起包含在“协助”中。我们的第一个目标是确定可显著提高对失控条件的敏感度，但不会显著提高误报率的检验。我们的第二个目标是确保控制图的简单性和可行性。我们的研究主要针对 Xbar 控制图和 I 控制图的检验。对于 R、S 和 MR 控制图，我们仅使用检验 1，该检验可指出某个数据点何时位于控制限之外。

方法

我们执行了相关模拟，并翻阅了相关资料，以评估稳定性的组合检验对控制图的敏感度和误报率的影响程度。此外，我们评估了与此检验关联的特殊原因的普遍性。有关用于每种检验的方法的详细信息，请参见下面的“结果”部分和附录 B。

结果

我们发现，检验 1、2 和 7 对评估 Xbar 控制图和 I 控制图的稳定性最有用：

检验 1：找出位于控制限之外的数据点

检验 1 找出距离中心线大于 3 个标准差的数据点。通常被认为是检测失控情况的必要检验。它只有 0.27% 的误报率。

检验 2：找出均值中的偏移

检验 2 是一旦出现连续 9 个点位于中心线的同一侧时发出信号。我们使用设置了 4 个它们分别移动了标准差的不同倍数的均值，执行了模拟，并确定了检测到信号所需的子组数。我们根据正态分布设置了控制限。我们发现，添加检验 2 可显著提高控制图的敏感度，从而检测到均值中的小偏移。在检验 1 和检验 2 结合使用时，与单独使用检验 1 相比，只需要显著地减少了的子组数就能检测到均值中的小偏移。因此，添加检验 2 有助于检测常见失控情况，能在误报率略微提高的条件下确保提高敏感度。

检验 7：找出太宽的控制限

检验 7 是一旦出现连续 12-15 个点位于中心线的 1 个标准差范围内时发出信号。检验 7 仅在根据这些数据估计控制限时用于 \bar{X} 控制图。如果此检验发现失效，原因通常是子组内存在有系统变异源（分层），这通常是未形成合理子组的结果。由于形成合理子组是确保控制图可以准确检测到失控情况的关键，因此，Minitab 会在根据数据估计控制限时使用修改的检验 7。检验 7 会在连续数据点数介于 12 到 15 之间时发出失效信号，具体取决于子组数：

$k = (\text{子组数}) \times 0.33$	必需的数据点数
$k < 12$	12
$k \geq 12$ 且 $k \leq 15$	整数 $\geq k$
$k > 15$	15

“协助”中不包含的检验

检验 3：连续 K 个点，全部递增或全部递减。

检验 3 旨在检测过程均值中的漂移（Davis 和 Woodall, 1988）。但是，在检验 3 与检验 1 和检验 2 结合使用时，它不会显著提高控制图的敏感度。由于我们已决定根据我们的模拟结果使用检验 1 和检验 2，使用检验 3 并不能显著提高控制图的价值。

检验 4：连续 K 个点，上下交错。

虽然此模式会出现在实际的统计中，但我们建议您寻找任何异常趋势或模式，而不是某种特定模式的检验。

检验 5： $K+1$ 个点中有 K 个点，距离中心线大于 2 个标准差

为确保控制图的简易性，我们排除了此检验，因为此检验不能唯一地找出实际情况中常见的特殊原因情况。



检验 6： $K+1$ 个点中有 K 个点，距离中心线大于 1 个标准差

为确保控制图的简易性，我们排除了此检验，因为此检验不能唯一地找出实际情况中常见的特殊原因情况。

检验 8：连续 K 个点，距离中心线（任一側）大于 1 个标准差

为确保控制图的简易性，我们排除了此检验，因为此检验不能唯一地找出实际情况中常见的特殊原因情况。

在检查稳定性时，“协助”的“报告卡”将显示以下状态指示符：

状态	条件
	<p>均值控制图（I 控制图或 Xbar 控制图）和变异控制图（MR、R 或 S 控制图）上没有失效的检验。</p> <p>用于每个控制图的检验包括：</p> <ul style="list-style-type: none"> • I 控制图：检验 1 和检验 2。 • Xbar 控制图：检验 1、检验 2 和检验 7。仅在控制限是根据数据估计获得时才执行检验 7。 • MR、R 和 S 控制图：检验 1。
	如果不满足上述条件。

数据量

如果没有已知的控制限值，则必须根据数据估计这些值。为获取精确的限值估计值，您必须有足够的数量。如果数据量不足，由于存在取样变异性，控制限可能远离“真”限值。为提高限值的精确度，可以增大观测值个数。

目标

我们对获取精确的控制限所需的观测值个数进行了调查。我们的目标是确定有 95% 的置信度确保由于检验 1 导致的误报率不超过 1% 所需的数据量。



方法

在数据呈正态分布时，这里不存在由于抽样变异性导致的误差，高于控制上限的数据点百分比为 0.135%。我们按 Bischak (2007) 提供的方法确定观测值个数是否足够，从而有 95% 的置信度确保由超过控制上限的数据点导致的误报率不超过 0.5%。由于控制限是对称的，此方法会因检验 1 产生不超过 1% 的总误报率。有关详细信息，请参见附录 C。

结果

我们确定，对于几乎所有的子组大小，观测值总数为 100 足以获得精确的控制限。虽然子组大小为 1 和 2 需要稍微更多的观测值，但使用 100 个观测值时，误报率仍保持在合理的低水平（1.1%）。因此，为便于简单处理，我们对所有子组大小使用观测值总数为 100 的临界值。

根据这些结果，在检查数据量时，“协助”的“报告卡”显示以下状态指示符：

状态	条件
	观测值个数大于等于 100。
	观测值个数小于 100。

相关数据

自相关是在一段时间内收集的数据点之间的相关性度量。大多数过程数据至少呈现某种小程度的自相关。如果自相关的相关度中等或较高，则它会导致不正确的检验结果。通常，自相关数据呈现正自相关，这可降低子组内变异，从而导致更高的误报率。

目标

我们对自相关和误报率之间的关系进行了调查。我们的目标是确定产生不可接受的误报率的自相关水平。为便于简单处理，我们分析了滞后 1 的自相关，因为滞后 1 的自相关一般都会大于滞后 2 或滞后更多的自相关。



方法

通过对自相关过程使用标准模型，我们对三个子组大小 ($n = 1, 3$ 和 5) 执行了 $\phi = 0.2, 0.4, 0.5, 0.6$ 和 0.8 (ϕ 是滞后 1 自相关) 的相关模拟。我们使用原始的 10,000 个子组的集合来确定控制限，然后记录了后增的 2,500 个子组的误报百分比。我们执行了 10,000 次迭代，并记录了平均误报百分比。有关详细信息，请参见附录 D。

结果

我们的模拟显示，甚至是中等自相关水平也会显著提高误报率。在自相关大于等于 0.4 时，误报率非常高，控制图将变得毫无意义。为解决此问题，如果数据中超出控制限制的实际点数出现了大于预期数据点数（即总共超过两个数据点或高于总点数的 2% 位于控制限之外）情况时，数据显示有自相关，“协助”将执行自相关检验。在这种情况下，“协助”首先检验连续数据点之间的自相关（滞后 = 1）是否显著大于 0.2。如果自相关显著大于 0.2，“协助”将检验连续数据点之间的自相关（滞后 = 1）是否显著大于 0.4。

在检查相关数据时，“协助”的“报告卡”将显示以下状态指示符：

状态	条件
	<p>位于控制限外的数据点数不大于预期数，即不到 2 个数据点或不到总点数的 2% 的数据点位于控制限之外。</p> <p>虽然位于控制限外的数据点数大于预期数，但在自相关等于 0.2 与自相关大于 0.2 的检验中，未能以 $\alpha = 0.01$ 的水平拒绝原假设。因此，没有足够的证据证明至少存在中等水平的自相关。</p>
	<p>如果不满足上述条件。</p> <p>注：如果拒绝了自相关等于 0.2 的原假设，则我们执行自相关等于 0.4 与自相关大于 0.4 的后续检验。如果拒绝了自相关等于 0.4 的检验，则我们将提高警告消息的严重度。</p>

有关自相关的假设检验的详细信息，请参见附录 D。

参考书

- AIAG (1995). *Statistical process control (SPC) reference manual*. Automotive Industry Action Group.
- Bischak, D.P., & Trietsch, D. (2007). The rate of false signals in \bar{X} control charts with estimated limits. *Journal of Quality Technology*, 39, 55 - 65.
- Bowerman, B.L., & O'Connell, R.T. (1979). *Forecasting and time series: An applied approach*. Belmont, CA: Duxbury Press.
- Chan, L. K., Hapuarachchi K. P., & Macpherson, B.D. (1988). Robustness of \bar{X} and R charts. *IEEE Transactions on Reliability*, 37, 117 - 123.
- Davis, R.B., & Woodall, W.H. (1988). Performance of the control chart trend rule under linear shift. *Journal of Quality Technology*, 20, 260 - 262.
- Montgomery, D. (2001). *Introduction to statistical quality control*, 4th edition. John Wiley & Sons.
- Schilling, E.G., & Nelson, P.R. (1976). The effect of non-normality on the control limits of \bar{X} charts. *Journal of Quality Technology*, 8, 183 - 188.
- Trietsch, D. (1999). *Statistical quality control: A loss minimization approach*. Singapore: World Scientific Publishing Company.
- Wheeler, D.J. (2004). *Advanced topics in statistical process control. The power of Shewhart's charts*, 2nd edition. Knoxville, TN: SPC Press.
- Yourstone, S.A., & Zimmer, W.J. (1992). Non-normality and the design of control charts for averages. *Decision Sciences*, 23, 1099 - 1113.

附录 A：正态性

模拟 A1：非正态性对误报率的影响度

为调查非正态数据对 I 控制图和 Xbar 控制图的性能的影响度，我们执行了相关模拟，以评估与非正态数据分布关联的误报率。我们着重关注右偏斜分布和带有重尾的对称分布，原因是在实际情况里这两种类型是非正态分布中最常见的。特别是，我们检查了 3 个偏斜分布（卡方分布，df=3、5 和 10）和 2 个重尾分布（t 分布，df=3 和 5）。

我们使用原始的 10,000 个子组的集合确定了控制限。我们记录了新增加的 2,500 个子组的误报百分比。然后，我们执行了 10,000 次迭代，计算了针对特殊原因使用检验 1 和检验 2 的平均误报百分比。结果如表 1 中所示。

表 1 针对 I 控制图 (n=1) 和 Xbar 控制图 (n=2、3、4 或 5) 的检验 1 和检验 2 的误报率

分布	子组大小				
	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
正态 (0, 1)	0.27, 0.39	0.27, 0.39	0.27, 0.39	0.27, 0.39	0.27, 0.39
Chi (3)	2.06, 1.17	1.18, 0.79	0.98, 0.62	0.86, 0.57	0.77, 0.53
Chi (5)	1.54, 0.83	0.93, 0.60	0.77, 0.53	0.67, 0.50	0.61, 0.47
Chi (10)	1.05, 0.60	0.67, 0.50	0.56, 0.46	0.50, 0.44	0.45, 0.43
t (3)	2.18, 0.39	1.30, 0.39	1.22, 0.39	1.16, 0.39	1.11, 0.39
t (5)	1.43, 0.39	0.93, 0.39	0.80, 0.39	0.71, 0.39	0.66, 0.39

表 1 中的每个单元格都分别列出了计算出的对于检验 1 和检验 2 的误报率。例如，与标准正态分布 (Normal (0, 1)) 和 I 控制图 (n=1) 关联的单元格指示，在数据呈正态分布时，对于检验 1 和检验 2，I 控制图上的误报率分别是 0.27% 和 0.39%。

通过比较正态和非正态分布之间 Xbar 控制图 (n=2、3、4、5) 的误报率，您可以看到，在违背正态性假设时，误报率不会显著提高。即使是高度偏斜分布（卡方分布，3）和重尾分布（t 分布，3），当子组数小至 2 时，检验 1 和检验 2 的合并误报率也小于 2.0%（相比于正态分布的 0.7%）。因此，我们得出结论，在实际应用中，Xbar 控制图在违背正态性假设的情况下仍然是稳健的。

对于 I 控制图，表 1 显示在分布高度偏斜（卡方分布，3）时检验 1 和检验 2 相结合的误报率大约为 3.2%；此误报率比数据呈正态分布时预计的误报率高出近 5 倍。对于重尾分布（t 分布，3），检验 1 和检验 2 相结合的误报率为 2.6%，比数据呈正态分布时预计的误报率高出近 4 倍。

因此，应该首先针对 I-MR 控制图来对数据进行正态性检验。如果否定 Anderson-Darling 正态性拟合优度检验的原假设（即存在统计显著的证据指出数据不遵循正态分布），则可使用 Box-Cox 变换对这些数据进行正态化处理。但是，Box-Cox 变换仅在数据向右偏斜时有效。

对于非正态数据的其他情况，需要进行进一步的调查才能确定最佳处理方式。此外，由于 Anderson-Darling 检验和 Box-Cox 变换都极易受极端观测值影响，因此应该在进行分析之前把已知有特殊原因的数据点先略去。

附录 B：稳定性

模拟 B1：将检验 2 添加到检验 1 对敏感度产生的影响

检验 1 当数据与中心线距离超过 3 个标准差时发出信号指示失控点。检验 2 是一旦出现连续 9 个点位于中心线的同一侧时发出信号指出有均值的偏移。

为评估结合使用检验 2 和检验 1 是否可提高均值控制图（I 控制图和 Xbar 控制图）的敏感度，我们确定了正态 (0, SD) 分布的控制限。我们按标准差 (SD) 倍数设置了分布均值的偏移，然后进行 10,000 次迭代，并记录检测中每次迭代中直到信号出现所需的子组数。结果如表 2 中所示。

表 2 直到检验 1 失效（检验 1）、检验 2 失效（检验 2）或检验 1 或检验 2 失效（检验 1 或 2）的平均子组数。均值偏移等于标准差 (SD) 的倍数，针对子组大小 (n) = 1、3 和 5，我们执行了相关模拟。

偏移	n=1			n=3			n=5		
	检验 1	检验 2	检验 1 或 2	检验 1	检验 2	检验 1 或 2	检验 1	检验 2	检验 1 或 2
0.5 SD	154	84	57	60	31	22	33	19	14
1 SD	44	24	17	10	11	7	4	10	4
1.5 SD	15	13	9	3	9	3	1.6	9	1.6
2 SD	6	10	5	1.5	9	1.5	1.1	9	1.1

如 I 控制图 (n=1) 的结果中所示，在同时使用这两个检验时（见“检验 1 或 2”列），只需要平均 57 个子组就能检测到均值中有 0.5 倍标准差的偏移（与单独使用检验 1 时检测到 0.5 倍标准差的偏移所需的平均 154 个子组相比）。类似地，使用这两个检验可提高 Xbar 控制图 (n=3, n=5) 的敏感度。例如，对于子组大小为 3 的情况，在使用检验 1 和检验 2 时，只需要平均 22 个子组就能检测到 0.5 倍标准差的偏移；而单独使用检验 1 时，需要 60 个子组才能检测到 0.5 倍标准差的偏移。因此，使用这两个检验可显著提高敏感度，以检测均值中的小偏移。随着偏移大小的增大，添加检验 2 并不会显著提高敏感度。

模拟 B2：检验 7 检测到分层情况（子组中的多个变异性源）的效率如何？

检验 7 通常在连续 12 至 15 个数据点距离中心线 1 个标准差以内时指出失效情况。“协助”使用修改的规则，根据数据中的子组数调整所需的数据点数。我们设 $k = (\text{子组数} * 0.33)$ ，并定义检验 7 失效所需的连续数据点数，如表 3 中所示。

表 3 检验 7 失效所需的连续数据点数

$k = (\text{子组数}) \times 0.33$	必需的数据点数
$k < 12$	12
$k \geq 12$ 且 $k \leq 15$	整数 $\geq k$
$k > 15$	15

以通常情况设置控制限，我们执行了相关模拟，以确定检验 7 使用上述条件能够指出失效的可能性。尤其是，我们想要在由数据估计控制限的状况下，评估用于检测此期间的分层情况的规则。

我们从带有标准差 (SD) 的正态分布中随机选择了 m 个大小为 n 的子组。每个子组中的一半数据点的均值为 0，另一半数据点的均值等于 SD 偏移 (0 SD、1 SD 或 2 SD)，我们执行 10,000 次迭代，并记录了在控制图中至少显示一次检验 7 信号所占的百分比，如表 4 中所示。

表 4 在控制图中至少显示一次检验 7 信号所占的百分比

子组数	$m = 50$	$m = 75$	$m = 25$	$m = 38$	$m = 25$	
子组大小	$n = 2$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 4$	$n = 6$	
检验	连续 15 个点	连续 15 个点	连续 12 个点	连续 13 个点	连续 12 个点	
偏移	0 SD	5%	8%	7%	8%	7%
	1 SD	23%	33%	17%	20%	15%
	2 SD	83%	94%	56%	66%	50%

正如此表显示偏移的第一行 (偏移 = 0 SD) 中所示，在不存在分层时，控制图中至少有一个检验 7 失效的只占相对较小的百分比。但是，在存在分层时 (偏移 = 1 SD 或偏移 = 2 SD)，控制图中至少有一个检验 7 失效的百分比要高得多 (最高达到 94%)。依此而知，在控制限是由数据估出时，检验 7 确实可以找出数据中的分层。

附录 C：数据量

公式 C1：根据控制上限的 95% 置信区间，必需的观测值个数

在数据呈正态分布，且对于变异性的抽样不存在误差时，对于受控过程，超过控制上限的观测值百分比为 0.135%。为确定是否有足够的观测值来确保误报率保持在合理的低水平，我们遵照 Bischak (2007) 并按以下公式计算控制上限 95% 的置信下限：

$$UCL_L = \hat{\mu} + \frac{h}{w_p}$$

其中

$\hat{\mu}$ = 中心线估计值

$h = 3 \sigma$

$$w_p = 1 - \frac{z_p \sqrt{1 - c_4^2}}{c_4 \sqrt{\frac{n}{k}}}$$

c_4 = Xbar 控制图的无偏常量

n = 观测值个数

k = 子组大小

z_p = 对于均值为 0 标准差为 1 的正态分布，其逆 cdf 在 $p = 0.95$ 时之值（即正态分位数）

我们设 $\frac{h}{w_p} = 2.65 \sigma$ ，这会产生超过控制上限的 0.5% 的误报率，解此式求出 n 。

对于 I 控制图，我们使用长度为 2 的平均移动极差估计 σ ；因此，我们只要将 Xbar 控制图中的观测值个数设定子组大小为 2，就可确定所需的数据量。根据这些计算，各种子组大小所需的观测值个数如表 5 中所示。

表 5 各种子组大小所需的观测值个数

子组大小	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
观测值个数	114	114	84	72	70	66	63	64	63	60	66	60	65	56	60

注 观测值个数应随着子组大小的增大而减小。但是，此规则的例外情况如表 5 中所示。出现这些例外的原因是，为了计算所需的观测值总个数，子组数在乘以每个子组中的观测值个数之前取整为下一个整数。

表 5 中的结果显示，对于所有子组大小，所需的观测值总个数小于等于 100，但子组大小为 1 或 2 时例外。但是，即使在子组大小为 1 或 2 时，100 个观测值的误报率仅大约为 1.1%。因此，对于所有子组大小而言，100 个观测值就是有效的临界值。

上述分析假设每个子组都有相同的普遍原因导致的变异量。实际上，在不同时间点收集的数据有不同的普遍原因导致的变异数。因此，您可以在更多的时间点对过程取样，以便使获得过程变异之估计值更具有代表性的机会提高。

附录 D：自相关

模拟 D1：自相关对误报率的影响度

我们使用以下模型定义了自相关过程：

$$x_t = \mu + \phi(x_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$$

其中

x_t = 在时间 t 时的观测值

μ = 过程均值

ϕ = 两个连续数据点之间的相关系数

ε_t 时间 t 时的误差项； $\varepsilon \sim$ 正态 $(0, 1)$

为便于简单处理，我们仅分析了滞后 1 的自相关，因为滞后 1 的自相关一般都会大于滞后 2 或滞后更多的自相关。

使用上述模型，我们对三个子组大小 ($n=1, 3$ 和 5) 执行了 $\phi = 0.2, 0.4, 0.5, 0.6$ 和 0.8 的相关模拟。我们使用原始的 10,000 个子组的集合来确定控制限，然后记录了后增的 2,500 个子组的误报百分比。我们执行了 10,000 次迭代，并针对每个自相关和子组大小的组合使用检验 1 和检验 2 计算了平均误报百分比。结果如下表 6 中所示。

表 6 针对带有自相关 (ϕ) 和子组大小 (n) 的过程，检验 1 和检验 2 的平均误报百分比

	ϕ				
子组大小	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8
$n = 1$	0.73, 1.08	2.01, 2.99	3.38, 4.98	5.77, 8.34	17.94, 23.83
$n = 3$	1.48, 0.57	5.35, 0.98	9.07, 1.39	14.59, 2.19	33.91, 7.91
$n = 5$	1.49, 0.50	5.48, 0.68	9.40, 0.86	15.24, 1.18	35.52, 3.84

请注意，随着 ϕ 值的增大，误报率也会增大。实际上，甚至是中等水平的自相关 ($\phi = 0.4$) 也会导致误报率显著增大。在自相关大于等于 0.4 时，控制图显示一个较大的误报百分比，表示控制图的结果几乎没有意义。

公式 D1：自相关检验

为确定数据中的自相关 ϕ 水平，我们遵照 Bowerman (1979) 并执行了检验，以使用以下统计量评估 $\phi = r$ 的原假设与 $\phi > r$ 的备择假设：

$$z = \frac{(\hat{\phi} - r)}{se_{\hat{\phi}}}$$

其中

$$\hat{\phi} = \frac{1}{m \hat{\sigma}} \sum_{i=1}^{m-1} (x_i - \mu)(x_{i+1} - \mu)$$

m = 观测值个数

$\hat{\sigma}$ = 样本方差

$$se_{\hat{\phi}} = \sqrt{m}$$

在计算 Xbar 控制图中的数据自相关时，我们不包含某个子组的最后一个数据点与下一个子组的第一个数据点之间的相关性，因为包含这些比较会导致自相关低估情况。遵照 Bowerman (1979)，我们根据标准正态分布计算上述检验的 p 值。

© 2015, 2017 Minitab Inc. All rights reserved.

Minitab®, Quality. Analysis. Results.® and the Minitab® logo are all registered trademarks of Minitab, Inc., in the United States and other countries. See minitab.com/legal/trademarks for more information.