

Cartes de contrôle des variables

Généralités

Les cartes de contrôle sont utilisées pour surveiller un procédé de façon régulière et déterminer s'il est maîtrisé. L'Assistant Minitab inclut deux des cartes de contrôle les plus communément utilisées pour les données continues :

- Les cartes X barre-R ou X barre-S. Ces cartes sont utilisées lorsque les données sont collectées dans des sous-groupes. Minitab utilise l'écart type standard regroupé pour estimer l'écart type standard à l'intérieur des sous-groupes. La carte R fournit une estimation efficace de la variation pour des sous-groupes dont l'effectif va jusqu'à 10, environ (AIAG, 1995 ; Montgomery, 2001). Pour les sous-groupes dont l'effectif est plus important, une carte S fournit une meilleure estimation de l'écart type individuel dans les sous-groupes. Pour suivre les conventions antérieures de Minitab et par prudence, nous recommandons d'utiliser une carte S lorsque l'effectif des sous-groupes est supérieur à 8. Pour les effectifs de sous-groupes inférieurs ou égaux à 8, les cartes R et S fournissent des résultats similaires.
- Les cartes de contrôle des individus et d'étendue mobile (I-EM). Cette carte est utilisée lorsqu'il n'y a pas de sous-groupes. Minitab estime l'écart type à l'aide d'une méthode calculant la moyenne d'une étendue mobile de longueur 2.

Les limites de contrôle d'une carte de contrôle sont généralement établies lors de la phase de contrôle du projet Six Sigma. Une carte de contrôle doit être assez sensible pour signaler rapidement l'existence d'une cause spéciale. Cette sensibilité peut être évaluée en calculant le nombre moyen de sous-groupes nécessaires pour signaler une cause spéciale. De plus, une carte de contrôle adaptée signale rarement une "fausse alarme" lorsque le procédé est maîtrisé. Le taux de fausse alarme peut être évalué en calculant le pourcentage de sous-groupes qui sont estimés "hors contrôle" lorsque le procédé est maîtrisé.

En général, les cartes de contrôle offrent des résultats optimaux lorsque chaque observation obéit à une loi de distribution normale, que chaque observation est indépendante et que la variabilité observée dans les sous-groupes tient uniquement à des causes communes. Le rapport de l'Assistant réalise automatiquement les contrôles suivants des données pour évaluer ces conditions :

- Normalité
- Stabilité
- Quantité de données
- Données corrélées

Dans ce document, nous étudions le comportement des cartes de contrôle des variables lorsque ces conditions varient et décrivons les démarches effectuées pour établir un ensemble d'instructions visant à évaluer le respect de ces conditions.

Vérification des données

Normalité

Les cartes de contrôle ne se fondent pas sur l'hypothèse selon laquelle les données du procédé sont distribuées normalement, mais les critères utilisés dans les tests des causes spéciales si. Si les données présentent une asymétrie importante ou obéissent à une loi de distribution dont les extrémités tombent trop lourdement (lois "à queues lourdes"), les résultats du test peuvent ne pas être exacts. Par exemple, le taux de fausse alarme de la carte risque d'être plus élevé que prévu.

Objectif

Nous avons étudié l'effet de données non normales sur la carte X-barre et sur la carte I. Nous voulions étudier l'influence de la non-normalité sur le taux de fausse alarme. Plus exactement, nous voulions déterminer si des données non normales augmentaient significativement la fréquence à laquelle une carte signale des points hors contrôle alors que le procédé est en fait maîtrisé (fausses alarmes).

Méthode

Nous avons réalisé des simulations avec 10 000 sous-groupes et différents niveaux de non-normalité, et nous avons enregistré le pourcentage de fausses alarmes. Les simulations nous permettent de tester différentes conditions pour déterminer les effets de la non-normalité. Nous avons choisi une loi présentant une asymétrie vers la droite et des lois symétriques à queues lourdes, car elles représentent des cas de distribution non normale que l'on rencontre fréquemment en pratique. Pour plus de détails, reportez-vous à l'Annexe A.

Les résultats

CARTE X BARRE (EFFECTIF DE SOUS-GROUPE ≥ 2)

Notre simulation a montré que le taux de fausse alarme n'augmente pas de façon significative lorsque les données sont non normales pour des effectifs de sous-groupe supérieurs ou égaux à 2. Tenant compte de ce résultat, nous ne vérifions pas la normalité des cartes X barre-R et X barre-S. Même lorsque les données sont très asymétriques ou présentent des queues très lourdes, le taux de fausse alarme pour le test 1 et le test 2 est inférieur à 2 %, ce qui n'est pas nettement plus élevé que le taux de fausse alarme de 0,7 % obtenu avec la loi normale.

CARTE I (EFFECTIF DE SOUS-GROUPE = 1)

Notre simulation a montré que la carte I est sensible aux données non normales. Lorsque les données sont non normales, la carte I produit un taux de fausse alarme 4 à 5 fois supérieur à celui obtenu lorsque les données sont normales. Pour remédier à la sensibilité de la carte I aux données non normales, l'Assistant effectue les actions suivantes :



- Réalisation d'un test d'Anderson-Darling si les données sont susceptibles d'être hautement non normales, ce qui est indiqué par un nombre de points hors-contrôle

plus élevé que prévu (c'est-à-dire si au moins 2 points et au moins 2 % des points se trouvent en dehors des limites de contrôle).

- Si le test d'Anderson-Darling suggère que les données ne sont pas normales, l'Assistant transforme les données à l'aide du lambda optimal de Box-Cox. Un test d'Anderson-Darling est ensuite effectué sur les données transformées. Si le test ne rejette pas l'hypothèse nulle (selon laquelle les données sont normales), l'Assistant suggère d'utiliser les données transformées dans le cas où le procédé produit naturellement des données non normales.

La transformation de Box-Cox est uniquement efficace pour les données non normales présentant une asymétrie vers la droite. Si la transformation n'est pas efficace pour vos données non normales, vous devez vous tourner vers d'autres options. De plus, étant donné que le test d'Anderson-Darling et la transformation de Box-Cox sont influencés par les observations extrêmes, vous devez omettre les points soumis à des causes spéciales avant de transformer vos données.

Lors du test de normalité, le rapport de l'Assistant pour la carte I affiche les indicateurs d'état suivants :

Etat	Condition
	Si moins de 2 points ou moins de 2 % des points sont en dehors des limites de contrôle, sur la carte I ou Le test de normalité d'Anderson-Darling pour les données initiales ou les données transformées de Box-Cox ne rejette pas l'hypothèse nulle (selon laquelle les données sont normales) pour $\alpha = 0,01$.
	Si les conditions ci-dessus ne sont pas remplies.

Stabilité

Huit tests peuvent être réalisés sur les cartes de contrôle des variables pour évaluer la stabilité du procédé. L'utilisation simultanée de ces tests augmente la sensibilité de la carte de contrôle. Cependant, il est important de déterminer l'objectif et la valeur ajoutée de chaque test car plus vous ajoutez de tests à la carte de contrôle, plus le taux de fausse alarme augmente.

Objectif

Nous souhaitons déterminer les tests de stabilité à inclure pour les cartes de contrôle des variables de l'Assistant. Notre premier objectif était d'identifier les tests qui accroissent de façon significative la sensibilité aux situations non maîtrisées sans augmenter de façon significative le taux de fausse alarme. Notre second objectif était d'assurer la simplicité et l'aspect pratique de la carte. Notre recherche s'est concentrée sur les tests pour la carte X barre et la carte I. Pour les cartes R, S et EM, nous utilisons uniquement le test 1, qui signale si un point se trouve en dehors des limites de contrôle.

Méthode

Nous avons réalisé des simulations et consulté les publications de référence existantes pour évaluer l'influence d'une combinaison de tests de stabilité sur la sensibilité et le taux de fausse alarme des cartes de contrôle. Nous avons également évalué la prévalence de causes spéciales associées au test. Pour plus de détails sur les méthodes utilisées pour chaque test, consultez la section de résultats ci-dessous et l'Annexe B.

Les résultats

Nous avons découvert que les tests 1, 2 et 7 étaient les plus utiles pour évaluer la stabilité sur la carte X barre et la carte I :

TEST 1 : IDENTIFIE LES POINTS EN DEHORS DES LIMITES DE CONTROLE

Le test 1 identifie les points se trouvant à plus de 3 écarts types de la ligne centrale. Le test 1 est universellement reconnu comme nécessaire pour la détection de situations non maîtrisées. Son taux de fausse alarme est seulement de 0,27 %.

TEST 2 : IDENTIFIE LES DECALAGES DANS LES MOYENNES

Le test 2 vérifie si 9 points consécutifs se trouvent du même côté de la ligne centrale. Nous avons effectué une simulation à l'aide de 4 moyennes différentes, définies sur des multiples de l'écart type, et déterminé le nombre de sous-groupes nécessaires pour détecter un signal. Nous avons défini les limites de contrôle en nous fondant sur la loi normale. Nous avons découvert que l'ajout du test 2 augmente de façon significative la sensibilité de la carte à de petits décalages dans la moyenne. Lorsque les tests 1 et 2 sont utilisés conjointement, le nombre de sous-groupes nécessaires pour détecter un petit décalage dans la moyenne est bien moindre que lorsque le test 1 est utilisé seul. Ainsi, l'ajout du test 2 favorise la détection de situations habituelles de données non maîtrisées et offre un gain de sensibilité suffisant pour justifier une légère augmentation du taux de fausse alarme.

TEST 7 : IDENTIFIE LES LIMITES DE CONTROLE TROP LARGES

Le test 7 signale si 12 à 15 points consécutifs se trouvent à moins d'un écart type de la ligne centrale. Le test 7 est utilisé uniquement pour la carte X barre lorsque l'estimation des limites de contrôle se fait à partir des données. Les échecs à ce test sont généralement dus à une source de variation systémique (stratification) au sein d'un sous-groupe, qui résulte souvent de la formation de sous-groupes qui ne sont pas rationnels. Etant donné que la formation de sous-groupes rationnels est essentielle pour garantir que la carte de contrôle puisse détecter avec exactitude les situations non maîtrisées, Minitab utilise un test 7 modifié lorsque les limites de contrôle sont calculées à partir des données. Le test 7 signale un échec lorsque le nombre de points consécutifs se trouve entre 12 et 15, selon le nombre de sous-groupes :

$k = (\text{Nombre de sous-groupes}) \times 0,33$	Points nécessaires
$k < 12$	12
$k \geq 12$ et $k \leq 15$	entier $\geq k$
$k > 15$	15

Tests non inclus dans l'Assistant

TEST 3 : K POINTS CONSECUTIFS, TOUS CROISSANTS OU TOUS DECROISSANTS

Le test 3 est conçu pour détecter des glissements dans la moyenne du procédé (Davis et Woodall, 1988). Cela dit, l'utilisation du test 3 en plus du test 1 et du test 2 n'augmente pas de façon significative la sensibilité de la carte à des glissements dans la moyenne du procédé. Comme nous avons déjà décidé d'utiliser les tests 1 et 2 en nous fondant sur les résultats de nos simulations, l'ajout du test 3 n'apportera pas de valeur significative à la carte.

TEST 4 : K POINTS CONSECUTIFS, CROISSANTS ET DECROISSANTS EN ALTERNANCE.

Bien que ce schéma puisse se produire en pratique, nous vous recommandons de rechercher toute tendance ou schéma aberrants, plutôt qu'un schéma spécifique.

TEST 5 : K POINTS SUR K+1 A PLUS DE 2 ECARTS TYPES DE LA LIGNE CENTRALE

Pour simplifier la carte, nous avons exclu ce test car il ne permettait pas d'identifier de façon unique les situations imputables à une cause particulière, habituelles en pratique.



TEST 6 : K POINTS SUR K+1 A PLUS D'UN ECART TYPE DE LA LIGNE CENTRALE

Pour simplifier la carte, nous avons exclu ce test car il ne permettait pas d'identifier de façon unique les situations imputables à une cause particulière, habituelles en pratique.

TEST 8 : K POINTS CONSECUTIFS A PLUS D'UN ECART TYPE DE LA LIGNE CENTRALE (DES DEUX COTES)

Pour simplifier la carte, nous avons exclu ce test car il ne permettait pas d'identifier de façon unique les situations imputables à une cause particulière, habituelles en pratique.

Lors du contrôle de la stabilité, le rapport de l'Assistant affiche les indicateurs d'état suivants :

Etat	Condition
	<p>Aucun échec aux tests sur la carte pour la moyenne (carte I ou carte X barre) et pour la variation (carte EM, R ou S).</p> <p>Les tests utilisés pour chaque carte sont :</p> <ul style="list-style-type: none">• Carte I : test 1 et test 2.• Carte X barre : test 1, test 2 et test 7. Le test 7 n'est effectué que lorsque l'estimation des limites de contrôle se fait à partir des données.• Cartes R, S et EM : test 1
	<p>Si la condition ci-dessus n'est pas remplie.</p>

Quantité de données

Si vous n'utilisez pas de valeurs connues pour les limites de contrôle, vous devez les estimer à partir des données. Pour obtenir des estimations précises des limites, vous devez disposer de suffisamment de données. Si la quantité de données est insuffisante, les limites de contrôle peuvent être éloignées des "vraies" limites, en raison de la variabilité de l'échantillonnage. Pour améliorer la précision des limites, vous pouvez augmenter le nombre d'observations.

Objectif

Nous avons recherché le nombre d'observations nécessaires pour obtenir des limites de contrôle précises. Notre objectif était de déterminer la quantité de données nécessaires pour que le taux de fausses alarmes dues au test 1 ne soit jamais supérieur à 1 %, avec un taux de confiance de 95 %.



Méthode

Lorsque les données sont normalement distribuées et qu'il n'y a pas d'erreur due à la variabilité de l'échantillonnage, le pourcentage de points qui se situent au-dessus de la limite de contrôle supérieure est de 0,135 %. Pour déterminer si le nombre d'observations est adapté, nous avons suivi la méthode définie par Bischak (2007) pour vérifier que le taux de fausse alarme dû aux points situés au-dessus de la limite de contrôle supérieure ne dépasse pas 0,5 %, avec 95 % de confiance. En raison de la symétrie des limites de contrôle, cette méthode donne un taux de fausse alarme total de 1 % pour le test 1. Pour plus de détails, consultez l'Annexe C.

Les résultats

Nous avons déterminé que pour presque tous les effectifs de sous-groupe, 100 observations au total sont nécessaires pour obtenir des limites de contrôle précises. Même si des effectifs de sous-groupe de 1 et 2 exigeaient légèrement plus d'observations, le taux de fausse alarme était raisonnablement bas (1,1 %) avec 100 observations. Aussi, pour plus de simplicité, nous utilisons un nombre total de 100 observations comme valeur limite pour tous les effectifs de sous-groupe.

Compte tenu de ces résultats, le rapport de l'Assistant affiche les indicateurs de statut suivants lors du contrôle de la quantité de données :

Etat	Condition
	Nombre d'observations \geq 100.
	Nombre d'observations $<$ 100.

Données corrélées

L'autocorrélation est une mesure de la dépendance existant entre des points de données collectés au cours du temps. La plupart des données de procédé présentent au moins un léger degré d'autocorrélation. Si l'autocorrélation est modérée ou élevée, les résultats des tests peuvent être incorrects. En général, les données autocorrélées présentent une autocorrélation positive, ce qui peut réduire la variation à l'intérieur des sous-groupes et causer un taux de fausse alarme plus élevé.

Objectif

Nous avons examiné la relation entre l'autocorrélation et le taux de fausse alarme. Notre objectif était de déterminer le niveau d'autocorrélation à partir duquel le taux de fausse alarme occasionné devenait inacceptable. Dans un souci de simplicité, nous avons étudié l'autocorrélation pour un décalage de 1, dans la mesure où cette dernière est a priori supérieure à celle pour les décalages supérieurs ou égaux à 2.



Méthode

En utilisant un modèle standard pour un procédé autocorrélé, nous avons réalisé des simulations pour $\phi = 0,2, 0,4, 0,5, 0,6$ et $0,8$ (ϕ est l'autocorrélation pour un décalage de 1) et pour trois effectifs de sous-groupe ($n = 1, 3$ et 5). Nous avons utilisé un ensemble initial de 10 000 sous-groupes pour établir les limites de contrôle. Nous avons ensuite enregistré le pourcentage de fausses alarmes pour 2 500 sous-groupes supplémentaires. Nous avons réalisé 10 000 itérations et enregistré le pourcentage moyen de fausses alarmes. Pour plus de détails, reportez-vous à l'Annexe D.

Les résultats

Nos simulations ont montré que même des niveaux modérés d'autocorrélation augmentent le taux de fausse alarme de façon significative. Lorsque l'autocorrélation est supérieure ou égale à 0,04, le taux de fausse alarme est très haut et la carte de contrôle est dénuée de sens. Pour résoudre ce problème, l'Assistant réalise un test d'autocorrélation si les données sont susceptibles d'être autocorrélées, ce qui est indiqué par un nombre de points hors-contrôle plus élevé que prévu (lorsque au moins 2 points et au moins 2 % des points se trouvent en dehors des limites de contrôle). Dans ce cas, l'Assistant vérifie d'abord si l'autocorrélation entre des points de données successifs (décalage = 1) est significativement supérieure à 0,2. Si c'est le cas, l'Assistant vérifie ensuite si l'autocorrélation entre des points de données successifs (décalage = 1) est significativement supérieure à 0,4.

Lors du test des données corrélées, l'Assistant affiche les indicateurs d'état suivants dans le rapport :

Etat	Condition
	<p>Le nombre de points situés en dehors des limites de contrôle n'est pas plus élevé que prévu, c'est-à-dire que moins de 2 points ou moins de 2 % des points se trouvent en dehors des limites de contrôle.</p> <p>Le nombre de points situés en dehors des limites de contrôle est plus élevé que prévu, mais le test d'autocorrélation (Autocorrélation = 0,2 contre Autocorrélation > 2) ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle pour alpha = 0,01. Ainsi, il n'est pas possible de conclure qu'au moins un niveau modéré d'autocorrélation existe.</p>
	<p>Si les conditions ci-dessus ne sont pas remplies.</p> <p>Remarque : si l'hypothèse nulle selon laquelle l'autocorrélation est égale à 0,2 est rejetée, nous réalisons un test d'autocorrélation (Autocorrélation = 0,4 contre Autocorrélation > 0,4) supplémentaire pour 0,4. Si le test d'autocorrélation à 0,4 est rejeté, nous augmentons la sévérité du message d'avertissement.</p>

Pour plus de détails sur le test d'hypothèse pour l'autocorrélation, reportez-vous à l'Annexe D.

Références

- AIAG (1995), *Statistical process control (SPC) reference manual*, Automotive Industry Action Group.
- Bischak, D.P et Trietsch, D. (2007), The rate of false signals in \bar{X} control charts with estimated limits, *Journal of Quality Technology*, 39, 55–65.
- Bowerman, B.L. et O'Connell, R.T. (1979), *Forecasting and time series: An applied approach*, Belmont, CA : Duxbury Press.
- Chan, L. K., Hapuarachchi, K. P et Macpherson, B.D. (1988), Robustness of \bar{X} and R charts, *IEEE Transactions on Reliability*, 37, 117–123.
- Davis, R.B. et Woodall, W.H. (1988), Performance of the control chart trend rule under linear shift, *Journal of Quality Technology*, 20, 260–262.
- Montgomery, D. (2001), *Introduction to statistical quality control*, 4^{ème} édition, John Wiley & Sons.
- Schilling, E.G. et Nelson, P.R. (1976), The effect of non-normality on the control limits of \bar{X} charts. *Journal of Quality Technology*, 8, 183–188.
- Trietsch, D. (1999), *Statistical quality control : A loss minimization approach*, Singapour : World Scientific Publishing Company.
- Wheeler, D.J (2004), *Advanced topics in statistical process control. The power of Shewhart's charts*, 2^{ème} édition, Knoxville, TN : SPC Press.
- Yourstone, S.A. et Zimmer, W.J. (1992), Non-normality and the design of control charts for averages, *Decision Sciences*, 23, 1099–1113.

Annexe A : normalité

Simulation A1 : influence de la non-normalité sur le taux de fausse alarme

Pour examiner l'influence des données non normales sur les résultats de la carte I et de la carte X barre, nous avons réalisé une simulation pour évaluer le taux de fausse alarme obtenu avec des lois non normales. Nous nous sommes concentrés sur les lois présentant une asymétrie vers la droite et les lois symétriques à queues lourdes, car elles représentent des cas de distribution non normale que l'on rencontre fréquemment en pratique. Nous avons examiné en particulier trois lois asymétriques (lois du Khi deux à 3, 5 et 10 DL) et deux lois à queues lourdes (lois T à 3 et 5 DL).

Nous avons établi les limites de contrôle à l'aide d'un ensemble initial de 10 000 sous-groupes. Nous avons enregistré le pourcentage de fausses alarmes pour 2 500 sous-groupes supplémentaires. Nous avons ensuite réalisé 10 000 itérations et calculé le pourcentage moyen de fausses alarmes à l'aide du test 1 et du test 2 des causes spéciales. Les résultats de la simulation sont affichés dans le tableau 1.

Tableau 1 : Pourcentage de fausses alarmes pour le test 1 et le test 2 pour la carte I (n=1) et la carte X barre (n=2, 3, 4 ou 5)

Loi de distribution	Effectif des sous-groupes				
	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
Normale (0,1)	0,27, 0,39	0,27, 0,39	0,27, 0,39	0,27, 0,39	0,27, 0,39
Khi(3)	2,06, 1,17	1,18, 0,79	0,98, 0,62	0,86, 0,57	0,77, 0,53
Khi(5)	1,54, 0,83	0,93, 0,60	0,77, 0,53	0,67, 0,50	0,61, 0,47
Khi(10)	1,05, 0,60	0,67, 0,50	0,56, 0,46	0,50, 0,44	0,45, 0,43
T(3)	2,18, 0,39	1,30, 0,39	1,22, 0,39	1,16, 0,39	1,11, 0,39
T(5)	1,43, 0,39	0,93, 0,39	0,80, 0,39	0,71, 0,39	0,66, 0,39

Chaque cellule du tableau 1 indique le taux de fausse alarme calculé pour les tests 1 et 2, respectivement. Par exemple, la cellule associée à la loi normale standard (Normale (0,1)) et à la carte I (n=1) indique que cette dernière présente un taux de fausse alarme de 0,27 % pour le test 1 et de 0,39 % pour le test 2 lorsque les données sont normalement distribuées.

En comparant les taux de fausse alarme des lois normales et non normales pour la carte X barre (n=2, 3, 4, 5), vous pouvez constater que le taux de fausse alarme n'augmente pas de façon significative lorsque l'hypothèse de normalité est contredite. Même avec des lois très asymétriques (Khi deux, 3) et des lois à queues lourdes (T, 3), le taux de fausse alarme combiné pour les tests 1 et 2 est inférieur à 2,0 % (contre 0,7 % pour une loi normale)

pour des effectifs de sous-groupe aussi petits que 2. Nous concluons donc qu'en pratique, la carte X barre résiste aux violations de l'hypothèse de normalité.

Pour la carte I, le tableau 1 affiche un taux de fausse alarme approximatif de 3,2 % pour les tests 1 et 2 combinés, lorsque la loi est très asymétrique (Khi deux, 3) ; ce taux de fausse alarme est presque 5 fois plus élevé que le taux de fausse alarme attendu lorsque les données sont normalement distribuées. Le taux de fausse alarme pour les tests 1 et 2 combinés est de 2,6 % pour les lois à queues lourdes (T, 3), ce qui représente presque 4 fois le taux attendu lorsque les données sont normalement distribuées.

Par conséquent, pour la carte I-EM, la normalité des données doit d'abord être testée. Si l'hypothèse nulle du test de normalité d'Anderson-Darling pour l'adéquation de l'ajustement est rejetée (il existe une preuve statistiquement significative que les données ne suivent pas une loi normale), une transformation de Box-Cox peut être utilisée pour normaliser les données. Cela dit, la transformation de Box-Cox n'est efficace que lorsque les données présentent une asymétrie vers la droite. Pour d'autres cas de données non normales, une étude plus poussée est nécessaire pour déterminer la meilleure démarche à suivre. En outre, étant donné que le test d'Anderson-Darling et la transformation de Box-Cox sont influencés par les observations extrêmes, les points soumis à des causes spéciales doivent être retirés des calculs avant l'analyse.

Annexe B : stabilité

Simulation B1 : influence de l'ajout du test 2 au test 1 sur la sensibilité

Le test 1 détecte les points hors contrôle en signalant les points situés à plus de 3 écarts types de la ligne centrale. Le test 2 détecte les décalages dans la moyenne en signalant les cas où 9 points consécutifs se trouvent du même côté de la ligne centrale.

Pour évaluer si l'utilisation du test 2 avec le test 1 augmente la sensibilité des cartes des moyennes (carte I et carte X barre), nous avons établi des limites de contrôle pour données normales (0, écart type). Nous avons décalé la moyenne de la distribution par un multiple de l'écart type et enregistré le nombre de sous-groupes nécessaires pour détecter un signal pour chacune des 10 000 itérations. Les résultats sont présentés dans le tableau 2.

Tableau 2 : Nombre moyen de sous-groupes jusqu'à l'échec du test 1 (test 1), du test 2 (test 2) et du test 1 ou 2 (test 1 ou 2). Le décalage dans la moyenne est égal à un multiple de l'écart type (EcTyp) et la simulation a été effectuée pour des effectifs de sous-groupe (n) = 1, 3 et 5.

Décalage	n = 1			n = 3			n = 5		
	test 1	test 2	test 1 ou 2	test 1	test 2	test 1 ou 2	test 1	test 2	test 1 ou 2
0,5 EcTyp	154	84	57	60	31	22	33	19	14
1 EcTyp	44	24	17	10	11	7	4	10	4
1,5 EcTyp	15	13	9	3	9	3	1,6	9	1,6
2 EcTyp	6	10	5	1,5	9	1,5	1,1	9	1,1

Comme le montrent les résultats pour la carte I (n=1), lorsque les deux tests sont utilisés (colonne *Test 1 ou 2*), 57 sous-groupes sont nécessaires en moyenne pour détecter un décalage de 0,5 écart type dans la moyenne, contre 154 lorsque le test 1 est utilisé seul. De même, l'utilisation des deux tests augmente la sensibilité de la carte X barre (n=3, n=5). Par exemple, pour un effectif de sous-groupe de 3, 22 sous-groupes en moyenne sont nécessaires pour détecter un décalage de 0,5 écart type lorsque les tests 1 et 2 sont utilisés, contre 60 lorsque le test 1 est utilisé seul. Par conséquent, l'utilisation conjointe des deux tests augmente significativement la sensibilité à de petits décalages dans la moyenne. Quand le décalage augmente, l'ajout du test 2 n'augmente pas la sensibilité de façon significative.

Simulation B2 : efficacité du test 7 pour détecter une stratification (plusieurs sources de variabilité dans des sous-groupes)

Le test 7 signale en général un échec lorsque 12 à 15 points consécutifs se trouvent à moins d'un écart type de la ligne centrale. L'Assistant utilise une règle modifiée qui ajuste le nombre de points nécessaires au nombre de sous-groupes dans les données. Avec $k = (\text{nombre de sous-groupes} \times 0,33)$, nous définissons le nombre de points consécutifs nécessaires pour un échec du test 7, comme indiqué dans le tableau 3.

Tableau 3 : Points consécutifs nécessaires à l'échec du test 7

$k = (\text{Nombre de sous-groupes}) \times 0,33$	Points nécessaires
$k < 12$	12
$k \geq 12$ et $k \leq 15$	entier $\geq k$
$k > 15$	15

A partir de scénarios courants de définition de limites de contrôle, nous avons réalisé une simulation pour déterminer la probabilité que le test 7 signale un échec, sur la base des critères indiqués ci-dessus. De façon plus spécifique, nous voulions évaluer la règle de détection de la stratification lors de la phase d'estimation des limites de contrôle à partir des données.

Nous avons choisi aléatoirement m sous-groupes, d'effectif n , avec des données normales présentant un écart type (EcTyp). La moitié des points de chaque sous-groupe présentait une moyenne égale à 0 et l'autre moitié une moyenne égale au décalage exprimé en écarts types (0 EcTyp, 1 EcTyp ou 2 EcTyp). Nous avons réalisé 10 000 itérations et enregistré le pourcentage de cartes qui affichaient au moins un signal pour le test 7, comme présenté dans le tableau 4.

Tableau 4 : Pourcentage de cartes ayant au moins un signal pour le test 7

Nombre de sous-groupes		$m = 50$	$m = 75$	$m = 25$	$m = 38$	$m = 25$
Effectif des sous-groupes		$n = 2$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 4$	$n = 6$
Test		15 consécutifs	15 consécutifs	12 consécutifs	13 consécutifs	12 consécutifs
Décalage	0 EcTyp	5%	8%	7%	8%	7%
	1 EcTyp	23%	33%	17%	20%	15%
	2 EcTyp	83%	94%	56%	66%	50%

Comme le montre la première ligne Décalage du tableau (décalage = 0 EcTyp), lorsqu'il n'y a pas de stratification, un pourcentage relativement faible de cartes présente au moins un

échec au test 7. En revanche, lorsqu'il y a une stratification (décalage = 1 EcTyp ou décalage = 2 EcTyp), un pourcentage de cartes beaucoup plus élevé, jusqu'à 94 %, présente au moins un échec au test 7. De cette façon, le test 7 permet d'identifier une stratification lors de la phase d'estimation des limites de contrôle.

Annexe C : quantité de données

Formule C1 : nombre d'observations nécessaires selon un IC à 95 % pour la limite de contrôle supérieure

Lorsque les données sont normalement distribuées et qu'il n'y a pas d'erreur due à la variabilité de l'échantillonnage, le pourcentage d'observations se situant au-dessus de la limite de contrôle supérieure est de 0,135 % pour un procédé maîtrisé. Pour déterminer si le nombre d'observations est suffisant pour assurer que le taux de fausse alarme reste raisonnablement bas, nous suivons Bischak (2007) et calculons une limite de confiance inférieure (à 95 %) pour la limite de contrôle supérieure, comme suit :

$$LCS_L = \hat{\mu} + \frac{h}{w_p}$$

où

$\hat{\mu}$ = estimation de la ligne centrale

$h = 3 \sigma$

$$w_p = 1 - \frac{z_p \sqrt{1 - c_4^2}}{c_4 \sqrt{\frac{n}{k}}}$$

c_4 = constante de correction de biais pour une carte X barre

n = nombre d'observations

k = effectif de sous-groupe

z_p = CDF inverse évaluée à $p = 0,95$ pour la loi normale avec moyenne = 0 et écart type = 1

Nous définissons $\frac{h}{w_p} = 2,65 \sigma$, ce qui produit un taux de fausse alarme dépassant la limite de contrôle supérieure de 0,5 % et permet de déterminer n .

Pour la carte I, nous estimons σ à partir de la moyenne d'une étendue mobile de longueur 2 ; ainsi, il nous suffit d'utiliser le nombre d'observations de la carte X barre dont l'effectif de sous-groupe est égal à 2 pour déterminer la quantité de données nécessaires. Le nombre d'observations nécessaires pour plusieurs effectifs d'échantillons, obtenu avec ces calculs, est affiché dans le tableau 5.

Tableau 5 : Nombre d'observations nécessaires pour plusieurs effectifs de sous-groupe

Effectif des sous-groupes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Nombre d'observations	114	114	84	72	70	66	63	64	63	60	66	60	65	56	60

Remarque : Le nombre d'observations doit normalement diminuer à mesure que l'effectif de sous-groupe augmente. Cependant, le tableau 8 contient des exceptions à cette règle. Ces exceptions sont dues au fait que le nombre de sous-groupes a été arrondi à l'entier immédiatement supérieur avant d'être multiplié par le nombre d'observations de chaque sous-groupe, afin de calculer le nombre total d'observations nécessaires.

Les résultats du tableau 5 montrent que le nombre total d'observations nécessaires est inférieur ou égal à 100 pour l'ensemble des effectifs de sous-groupe, sauf lorsque cet effectif est de 1 ou 2. Cela dit, même lorsque l'effectif du sous-groupe est de 1 ou 2, le taux de fausse alarme n'est que de 1,1 % environ avec 100 observations. Par conséquent, 100 observations constitue une valeur limite efficace pour tous les effectifs de sous-groupe.

L'analyse ci-dessus suppose que chaque sous-groupe présentera le même degré de variation due à des causes communes. En pratique, des données collectées à différents moments peuvent présenter des niveaux distincts de variabilité due à des causes communes. Aussi est-il conseillé d'échantillonner le procédé à des moments plus nombreux que nécessaire afin d'estimer la variation du procédé de la manière la plus représentative possible.

Annexe D : autocorrélation

Simulation D1 : influence de l'autocorrélation sur le taux de fausse alarme

Nous avons défini un procédé autocorrélé à l'aide du modèle suivant :

$$x_t = \mu + \phi (x_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$$

où

x_t = observation au temps t

μ = moyenne du procédé

ϕ = corrélation entre deux points consécutifs

ε_t = terme d'erreur au temps t ; $\varepsilon \sim$ Normale (0, 1)

Dans un souci de simplicité, nous avons uniquement étudié l'autocorrélation pour le décalage de 1, dans la mesure où cette dernière est a priori supérieure à celle pour les décalages supérieurs ou égaux à 2.

En utilisant le modèle ci-dessus, nous avons effectué une simulation avec $\phi = 0,2, 0,4, 0,5, 0,6$ et $0,8$, et avec trois effectifs de sous-groupes ($n=1, 3$ et 5). Nous avons utilisé un ensemble initial de 10 000 sous-groupes pour établir les limites de contrôle, puis nous avons enregistré le pourcentage de fausses alarmes pour 2 500 groupes supplémentaires. Nous avons réalisé 10 000 itérations et enregistré le pourcentage moyen de fausses alarmes aux tests 1 et 2 pour chaque combinaison d'autocorrélation et d'effectif de sous-groupe. Les résultats sont présentés dans le tableau 6 ci-dessous.

Tableau 6 : Pourcentage moyen de fausses alarmes aux tests 1 et 2 pour un procédé avec une autocorrélation (ϕ) et un effectif de sous-groupe (n)

Effectif des sous-groupes	ϕ				
	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8
n = 1	0,73, 1,08	2,01, 2,99	3,38, 4,98	5,77, 8,34	17,94, 23,83
n = 3	1,48, 0,57	5,35, 0,98	9,07, 1,39	14,59, 2,19	33,91, 7,91
n = 5	1,49, 0,50	5,48, 0,68	9,40, 0,86	15,24, 1,18	35,52, 3,84

Remarque : à mesure que la valeur de ϕ augmente, le taux de fausse alarme augmente également. En fait, même des niveaux modérés d'autocorrélation ($\phi = 0,4$) entraînent des augmentations importantes du taux de fausse alarme. Lorsque l'autocorrélation est supérieure ou égale à $0,4$, la carte de contrôle affiche un pourcentage de fausses alarmes tellement important que les résultats de la carte sont quasiment dénués de sens.

Formule D1 : test d'autocorrélation

Pour déterminer le niveau d'autocorrélation ϕ dans les données, nous avons suivi Bowerman (1979) et avons réalisé un test afin de tester l'hypothèse nulle selon laquelle $\phi = r$, et l'hypothèse alternative selon laquelle $\phi > r$, à l'aide du test statique suivant :

$$z = \frac{(\hat{\phi} - r)}{es_{\hat{\phi}}}$$

où

$$\hat{\phi} = \frac{1}{m \hat{\sigma}} \sum_{i=1}^{m-1} (x_i - \mu)(x_{i+1} - \mu)$$

m = nombre d'observations

$\hat{\sigma}$ = variance de l'échantillon

$$es_{\hat{\phi}} = \sqrt{m}$$

Lors du calcul de l'autocorrélation des données dans les cartes X barre, nous n'incluons pas la dépendance entre le dernier point d'un sous-groupe et le premier point du sous-groupe suivant car la prise en compte de ces comparaisons entraînerait une sous-estimation de l'autocorrélation. En suivant Bowerman (1979), nous calculons la valeur de p en fonction d'une loi normale standard.

© 2015, 2017 Minitab Inc. All rights reserved.

Minitab®, Quality. Analysis. Results.® and the Minitab® logo are all registered trademarks of Minitab, Inc., in the United States and other countries. See minitab.com/legal/trademarks for more information.