

Cartes de contrôle aux attributs

Généralités

Les cartes de contrôle sont utilisées pour surveiller un procédé de façon régulière et déterminer s'il est maîtrisé. Lorsqu'il est impossible de mesurer la qualité d'un produit ou d'un service à l'aide de données continues, cette qualité est souvent évaluée sur la base de données d'attribut. L'Assistant Minitab propose deux cartes de contrôle, très utilisées, pour surveiller un procédé à l'aide de données d'attribut :

- Carte P : cette carte est utilisée lorsqu'un produit ou un service est qualifié de défectueux ou non défectueux. La carte P représente sous forme graphique la proportion d'éléments défectueux par sous-groupe. Les données collectées correspondent au nombre d'éléments défectueux dans chaque sous-groupe, qui est censé suivre une loi binomiale avec un paramètre de proportion inconnu (p).
- Carte U : cette carte est utilisée lorsqu'un produit ou un service peut présenter plusieurs défauts et que le nombre de défauts est compté. La carte U représente sous forme graphique le nombre de défauts par unité. Les données collectées correspondent au nombre total de défauts dans chaque sous-groupe, qui est censé suivre une loi de Poisson avec un nombre moyen de défauts par sous-groupe inconnu.

Les limites de contrôle d'une carte de contrôle sont généralement établies lors de la phase de contrôle du projet Six Sigma. Une carte de contrôle doit être assez sensible pour signaler rapidement l'existence d'une cause spéciale. Cette sensibilité peut être évaluée en calculant le nombre moyen de sous-groupes nécessaires pour signaler une cause spéciale. De plus, une carte de contrôle adaptée doit rarement signaler une "fausse alarme" lorsque le procédé est maîtrisé. Le taux de fausse alarme peut être évalué en calculant le pourcentage de sous-groupes qui sont estimés "hors contrôle" lorsque le procédé est maîtrisé.

Pour vous aider à évaluer la qualité des cartes de contrôle, le rapport de l'Assistant effectue automatiquement les contrôles de données suivants :

- Stabilité
- Nombre de sous-groupes
- Effectif des sous-groupes
- Variation attendue

Dans ce document, nous examinons le comportement d'une carte de contrôle aux attributs lorsque ces conditions varient. Nous décrivons également la façon dont nous avons établi un ensemble d'indications relatives à l'évaluation des exigences de ces conditions.

Nous présentons également les cartes P' et U' de Laney qui sont recommandées lorsque la variation observée dans les données ne correspond pas à la variation attendue et que Minitab détecte une surdispersion ou une sous-dispersion.

Remarque La carte P et la carte U dépendent d'hypothèses supplémentaires qui, soit ne peuvent pas être vérifiées, soit sont difficiles à vérifier. Pour plus de détails, voir l'Annexe A.

Contrôles de données

Stabilité

Pour les cartes de contrôle aux attributs, il est possible d'effectuer quatre tests pour évaluer la stabilité du procédé. L'utilisation simultanée de ces tests augmente la sensibilité de la carte de contrôle. Cependant, il est important de déterminer l'objectif et la valeur ajoutée de chaque test car plus vous ajoutez de tests à la carte de contrôle, plus le taux de fausse alarme augmente.

Objectif

Nous souhaitons déterminer les tests de stabilité à inclure, parmi les quatre, pour les cartes de contrôle aux attributs dans l'Assistant. Notre objectif était d'identifier les tests qui augmentaient de façon significative la sensibilité aux situations non maîtrisées sans augmenter de façon significative le taux de fausse alarme, tout en garantissant la simplicité et l'aspect pratique des cartes.

Méthode

Les quatre tests de stabilité des cartes aux attributs correspondent aux tests 1 à 4 des causes spéciales pour les cartes de contrôle des variables. Avec un effectif de sous-groupe adapté, la proportion d'éléments défectueux (carte P), ou le nombre de défauts par unité (carte U) suivent une loi normale. Par conséquent, des simulations effectuées pour des cartes de contrôle des variables à partir de données normales produiront des résultats identiques en ce qui concerne la sensibilité et le taux de fausse alarme des tests. Nous nous sommes donc fondés sur les résultats d'une telle simulation et sur une vue d'ensemble des publications consacrées aux cartes de contrôle des variables pour évaluer l'influence des quatre tests de stabilité sur la sensibilité et le taux de fausse alarme des cartes aux attributs. De plus, nous avons évalué la prévalence de causes spéciales associées au test. Pour plus de détails sur les méthodes utilisées pour chaque test, consultez la section de résultats ci-dessous et l'Annexe B.

Les résultats

Des quatre tests utilisés pour évaluer la stabilité dans les cartes aux attributs, nous avons constaté que les tests 1 et 2 sont les plus utiles :

TEST 1 : IDENTIFIE LES POINTS EN DEHORS DES LIMITES DE CONTROLE

Le test 1 identifie les points se trouvant à plus de 3 écarts types de la ligne centrale. Le test 1 est universellement reconnu comme nécessaire pour la détection de situations non maîtrisées. Son taux de fausse alarme est seulement de 0,27 %.

TEST 2 : IDENTIFIE DES DECALAGES DANS LA PROPORTION D'ELEMENTS DEFECTUEUX (CARTE P) OU DANS LE NOMBRE MOYEN DE DEFAUTS PAR UNITE (CARTE U)

Le test 2 vérifie si 9 points consécutifs se trouvent du même côté de la ligne centrale. Nous avons réalisé une simulation pour déterminer le nombre de sous-groupes nécessaires pour

détecter un signal indiquant un décalage dans la proportion d'éléments défectueux (carte P) ou dans le nombre moyen de défauts par unité (carte U). Nous avons constaté que l'ajout du test 2 augmente de façon significative la sensibilité de la carte à de petits décalages dans la proportion d'éléments défectueux ou dans le nombre moyen de défauts par unité. Lorsque les tests 1 et 2 sont utilisés conjointement, le nombre de sous-groupes requis pour détecter un petit décalage dans la moyenne est bien moindre que lorsque le test 1 est utilisé seul. Ainsi, l'ajout du test 2 favorise la détection de situations communes de données non maîtrisées et offre un gain de sensibilité suffisant pour justifier une légère augmentation du taux de fausse alarme.

Tests non inclus dans l'Assistant



TEST 3 : K POINTS CONSECUTIFS, TOUS CROISSANTS OU TOUS DECROISSANTS

Le test 3 est conçu pour détecter des glissements dans la proportion d'éléments défectueux ou dans le nombre moyen de défauts par unité (David et Woodall, 1988). Cela dit, l'utilisation du test 3 en plus du test 1 et du test 2 n'augmente pas de façon significative la sensibilité de la carte. Comme nous avons déjà décidé d'utiliser les tests 1 et 2 en nous fondant sur les résultats de nos simulations, l'ajout du test 3 n'apportera pas de valeur significative à la carte.

TEST 4 : K POINTS CONSECUTIFS, CROISSANTS ET DECROISSANTS EN ALTERNANCE.

Bien que ce schéma puisse se produire dans la pratique, nous vous recommandons de rechercher toute tendance ou schéma aberrants, plutôt qu'un schéma spécifique.

Par conséquent, l'Assistant utilise uniquement les tests 1 et 2 pour vérifier la stabilité des cartes de contrôle aux attributs et affiche les indicateurs d'état suivants dans le rapport :

Etat	Condition
	Aucun échec au test 1 ou au test 2 sur la carte.
	Si la condition ci-dessus n'est pas remplie.

Nombre de sous-groupes

Si vous n'utilisez pas de valeurs connues pour les limites de contrôle, vous devez les estimer à partir des données. Pour obtenir des estimations précises des limites, vous devez disposer de suffisamment de données. Si la quantité de données est insuffisante, les limites de contrôle peuvent être éloignées des "vraies" limites, en raison de la variabilité de l'échantillonnage. Pour améliorer la précision des limites, vous pouvez augmenter le nombre de sous-groupes.

Objectif

Nous avons étudié le nombre de sous-groupes nécessaires pour obtenir des limites de contrôle précises pour la carte P et la carte U. Notre objectif était de déterminer le nombre de sous-groupes nécessaires pour garantir, pour le test 1, un taux de fausse alarme inférieur

ou égal à 2 %, avec niveau de confiance de 95 %. Nous n'avons pas évalué l'effet du nombre de sous-groupes sur la ligne centrale (test 2) car les estimations de la ligne centrale sont plus précises que celles des limites de contrôle.

Méthode

Avec un effectif de sous-groupe adéquat et sans erreur due à la variabilité de l'échantillonnage, le pourcentage de points au-dessus de la limite de contrôle supérieure est de 0,135 %. Pour déterminer si le nombre de sous-groupes est adéquat, nous avons suivi la méthode exposée par Trietsch (1999) afin de nous assurer que le taux de fausses alarmes dues aux points situés au-dessus de la limite de contrôle supérieure est inférieur ou égal à 1 %, avec un intervalle de confiance à 95 %. En raison de la symétrie des limites de contrôle, cette méthode produit un taux de fausse alarme de 2 % pour le test 1. Pour plus de détails, voir l'Annexe C.

Les résultats

CARTE P

Le nombre de sous-groupes (m) nécessaires pour garantir que le taux de fausses alarmes dues au test 1 ne soit pas supérieur à 2 % sur la carte P est indiqué ci-dessous, pour plusieurs effectifs de sous-groupes (n) et proportions (\bar{p}).



Effectif de sous-groupe (n)	\bar{p}				
	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1
10	1881	421	228	60	35
50	425	109	64	23	16
100	232	65	41	17	13
150	165	49	32	14	11
200	131	41	27	13	10
500	65	24	18	10	9

CARTE U

Le nombre de sous-groupes (m) nécessaires pour garantir que le taux de fausses alarmes dues au test 1 ne soit pas supérieur à 2 % sur la carte U est indiqué ci-dessous, pour chaque valeur donnée du nombre moyen de défauts par sous-groupe (\bar{c}).

\bar{c}	0,1	0,3	0,5	0,7	1,0	3,0	5,0	10,0	30,0	50,0
Nombre de sous-groupes	232	95	65	52	41	22	18	14	10	9

Sur la base de ces résultats, le rapport de l'Assistant affiche les indicateurs d'état suivants lorsqu'il vérifie le nombre de sous-groupes des cartes de contrôle aux attributs :

Etat	Condition
	Nombre de sous-groupes \geq nombre requis. Le nombre de sous-groupes est assez élevé pour que, avec un intervalle de confiance à 95 %, le taux de fausses alarmes dues au test 1 n'excède pas 2 %.
	Si la condition ci-dessus n'est pas remplie.

Effectif des sous-groupes

La loi normale est utilisée pour obtenir une approximation de la loi de distribution de la proportion des éléments défectueux (\hat{p}) dans la carte P et de la loi distribution du nombre de défauts par unité (\hat{u}) dans la carte U. Plus l'effectif des sous-groupes est élevé, plus cette approximation est exacte. Etant donné que les critères des tests utilisés dans chaque carte de contrôle se fondent sur la loi normale, augmenter l'effectif des sous-groupes pour obtenir une meilleure approximation selon la loi normale permet aussi d'améliorer la capacité de la carte à identifier avec exactitude les situations non maîtrisées et de réduire le taux de fausse alarme. Lorsque la proportion d'éléments défectueux ou le nombre de défauts par unité est bas, vos sous-groupes doivent être plus grands pour garantir des résultats exacts.

Objectif

Minitab a cherché à déterminer l'effectif de sous-groupe nécessaire pour garantir que l'approximation selon la loi normale est suffisamment adaptée pour obtenir des résultats exacts pour la carte P et la carte U.

Méthode

Nous avons réalisé des simulations pour évaluer les taux de fausse alarme avec plusieurs effectifs de sous-groupes pour plusieurs proportions (p) (pour la carte P) et plusieurs nombres moyens de défauts par sous-groupe (c) (pour la carte U). Pour déterminer si l'effectif des sous-groupes était assez grand pour obtenir une approximation selon la loi normale adaptée et donc un taux de fausse alarme assez bas, nous avons comparé ces résultats au taux de fausse alarme prévu sous l'hypothèse normale (0,27 % pour le test 1 et 0,39 % pour le test 2). Pour plus de détails, reportez-vous à l'Annexe D.



Les résultats

CARTE P

Nos recherches ont démontré que l'effectif de sous-groupe requis pour la carte P dépendait de la proportion d'éléments défectueux (p). Plus la valeur de p est petite, plus l'effectif de sous-groupe (n) nécessaire est important. Lorsque le produit np est supérieur ou égal à 0,5, le taux de fausse alarme combiné pour les tests 1 et 2 est inférieur à une valeur approximative de 2,5 %. En revanche, lorsque le produit np est inférieur à 0,5, le taux de

fausse alarme combiné pour les tests 1 et 2 peut être beaucoup plus élevé, atteignant des niveaux bien supérieurs à 10 %. Ainsi, en se fondant sur ce critère, les performances de la carte P sont adaptées lorsque la valeur de np est supérieure ou égale à 0,5.



Lors de la vérification de l'effectif de sous-groupe pour la carte P, le rapport de l'Assistant affiche les indicateurs d'état suivants :

Etat	Condition
	$n_i \bar{p} \geq 0,5$ pour tous les i où n_i = effectif du i ème sous-groupe \bar{p} = proportion moyenne d'éléments défectueux
	Si la condition ci-dessus n'est pas remplie.

CARTE U

Nos recherches ont démontré que l'effectif de sous-groupe nécessaire pour la carte U dépendait du nombre de défauts par sous-groupe (c), qui est égal à l'effectif du sous-groupe (n) multiplié par le nombre de défauts par unité (u). Le pourcentage de fausse alarme est plus élevé lorsque le nombre de défauts est petit. Lorsque $c = nu$ est supérieur ou égal à 0,5, le taux de fausse alarme combiné pour les tests 1 et 2 est inférieur à une valeur approximative de 2,5 %. En revanche, pour des valeurs de c inférieures à 0,5, le taux de fausse alarme combiné pour les tests 1 et 2 peut être beaucoup plus élevé, atteignant des niveaux bien supérieurs à 10 %. Ainsi, en se fondant sur ce critère, les performances de la carte U sont adaptées lorsque la valeur $c = nu$ est supérieure ou égale à 0,5.

Lors de la vérification de l'effectif de sous-groupe pour la carte U, le rapport de l'Assistant affiche les indicateurs d'état suivants :

Etat	Condition
	$n_i \bar{u} \geq 0,5$ pour tous les i où n_i = effectif du i ème sous-groupe \bar{u} = nombre moyen de défauts par unité
	Si la condition ci-dessus n'est pas remplie.

Variation attendue

Les cartes P et U traditionnelles supposent que la variation des données suit la loi binomiale pour les défectueux ou une loi de Poisson pour les défauts. Les cartes supposent également que votre taux de défectueux ou de défauts reste constant dans le temps. Si la variation au sein des données est supérieure ou inférieure à celle attendue, il se peut que vos données soient sous-dispersées ou surdispersées et que les cartes ne fonctionnent pas comme prévu.

Surdispersion

On parle de surdispersion lorsque la variation au sein des données est supérieure à celle attendue. Généralement, le taux de défectueux ou de défauts présente des variations au cours du temps, en raison de facteurs de bruit externe qui ne sont pas des causes spéciales. Dans la plupart des applications de ces cartes, la variation d'échantillonnage des statistiques de sous-groupe est suffisamment importante pour que la variation dans le taux de défectueux ou de défauts sous-jacent ne soit pas visible. Néanmoins, plus les effectifs des sous-groupes augmentent, plus la variation d'échantillonnage diminue, si bien que, passé un certain point, la variation dans le taux de défauts sous-jacent peut devenir plus grande que la variation d'échantillonnage. Cela produit une carte avec des limites de contrôle extrêmement étroites et un taux de fausse alarme très élevé.

Sous-dispersion

Il existe une sous-dispersion lorsque la variation au niveau de vos données est inférieure à la variation attendue. Une sous-dispersion peut survenir lorsque des sous-groupes adjacents sont corrélés les uns avec les autres, situation également connue sous le nom d'autocorrélation. Par exemple, lorsqu'un outil s'use, le nombre de défauts peut augmenter. En raison de l'augmentation du nombre de défauts dans les sous-groupes, ceux-ci peuvent présenter davantage de similitude que par le simple fait du hasard. Lorsque les données présentent une sous-dispersion, les limites de contrôle sur une carte P ou une carte U traditionnelle peuvent être trop larges. Si les limites de contrôle sont trop larges, la carte signale rarement les sous-groupes hors contrôle. Conséquence : vous pouvez négliger une variation des causes spéciales et la confondre avec une variation des causes communes.

Si la surdispersion ou la sous-dispersion est assez importante, Minitab recommande l'utilisation d'une carte de Laney P' ou U'. Pour plus d'informations, reportez-vous à la section Cartes P' et U' de Laney ci-dessous.

Objectif

Nous souhaitons définir une méthode pour détecter une surdispersion ou une sous-dispersion au sein des données.

Méthode

En étudiant les publications spécialisées, nous avons trouvé plusieurs méthodes pour détecter la surdispersion et la sous-dispersion. Nous avons sélectionné une méthode de diagnostic trouvée chez Jones et Govindaraju (2001). Cette méthode utilise un diagramme de probabilité pour déterminer la variation attendue avec des données obéissant à une loi binomiale (pour les données sur les défectueux) ou à une loi de Poisson (pour les données

sur les défauts). On compare ensuite la variation attendue à la variation observée. Pour plus de détails sur la méthode de diagnostic, reportez-vous à l'Annexe E.

Pour vérifier la présence d'une surdispersion, Minitab détermine aussi le nombre de points situés en dehors des limites de contrôle dans les cartes P et U traditionnelles. La surdispersion ayant pour effet de générer un taux de fausse alarme élevé, si seul un petit pourcentage de points est hors contrôle, il est peu probable qu'il existe un problème de surdispersion des données.

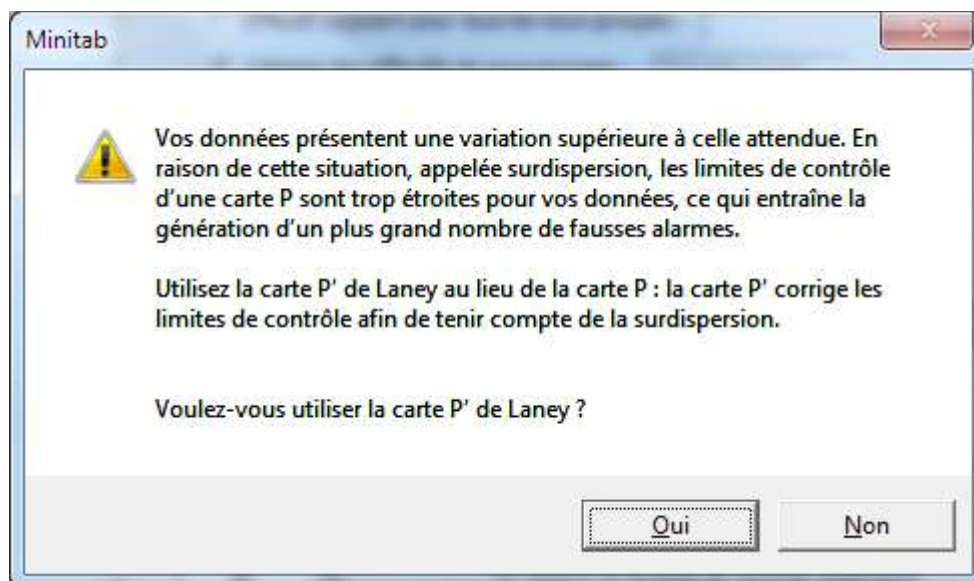
Les résultats

Minitab effectue le test de diagnostic pour la surdispersion et la sous-dispersion une fois que l'utilisateur a sélectionné OK dans la boîte de dialogue de la carte P ou U, avant l'affichage de la carte.

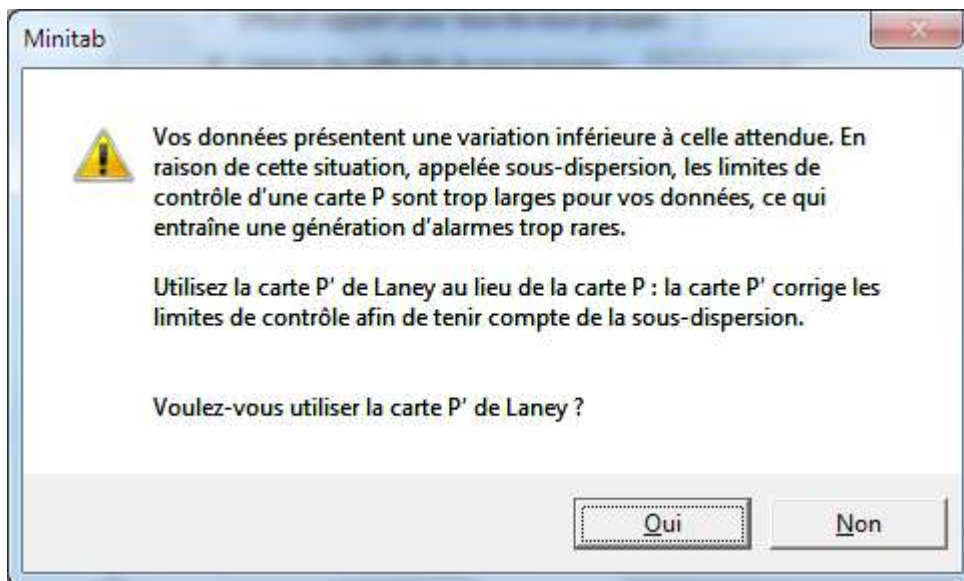
Il y a surdispersion dans les conditions suivantes :

- Le rapport entre la variation observée et la variation attendue est supérieur à 130 %.
- Plus de 2 % des points se trouvent en dehors des limites de contrôle.
- Le nombre de points situés en dehors des limites de contrôle est supérieur à 1.

Si une surdispersion est détectée, Minitab affiche un message demandant à l'utilisateur s'il souhaite afficher une carte P' ou U' de Laney. Le message affiché pour la carte P' est affiché ci-dessous :





Il y a sous-dispersion lorsque le rapport entre la variation observée et la variation attendue est inférieur à 75 %. Si une sous-dispersion est détectée, Minitab affiche un message demandant à l'utilisateur s'il souhaite afficher une carte P' ou U' de Laney. Le message affiché pour la carte P' est affiché ci-dessous :



Si l'utilisateur choisit d'utiliser la carte de Laney, Minitab l'affiche dans le rapport récapitulatif. Si l'utilisateur choisit de ne pas utiliser la carte de Laney, Minitab affiche la carte P ou U traditionnelle dans le rapport récapitulatif. Toutefois, la carte traditionnelle et la carte de Laney s'affichent toutes deux dans le rapport de diagnostic. L'affichage des deux cartes permet à l'utilisateur de visualiser l'effet de la sous-dispersion ou de la surdispersion sur la carte P ou U et de déterminer si la carte de Laney est plus appropriée pour ses données.

De plus, lors du test de surdispersion ou de sous-dispersion, le rapport de l'Assistant affiche les indicateurs d'état suivants :

Etat	Condition
	<p>Taux de dispersion > 130 %, moins de 2 % des points en dehors des limites de contrôle ou nombre de points en dehors des limites de contrôle = 1</p> <p>Taux de dispersion > 75 % et ≤ 130 %</p> <p>Taux de dispersion > 130 %, plus de 2 % des points en dehors des limites de contrôle et nombre de points en dehors des limites de contrôle > 1, l'utilisateur choisit d'utiliser la carte de Laney P' ou U'</p> <p>Taux de dispersion < 75 % et l'utilisateur choisit d'utiliser la carte de Laney P' ou U'</p> <p>où</p> <p>Taux de dispersion = $100 \times (\text{variation observée}) / (\text{variation attendue})$</p>
	<p>Taux de dispersion > 130 %, plus de 2 % des points en dehors des limites de contrôle et nombre de points en dehors des limites de contrôle > 1, l'utilisateur n'a pas choisi d'utiliser la carte de Laney P' ou U'</p> <p>Taux de dispersion < 75 % et l'utilisateur n'a pas choisi d'utiliser la carte de Laney P' ou U'</p>

Cartes de Laney (P' et U')

Les cartes P et U traditionnelles supposent que la variation au sein des données suit la loi binomiale pour les données sur les défectueux, ou la loi de Poisson pour les données sur les défauts. Les cartes supposent également que votre taux de défectueux ou de défauts reste constant dans le temps. Minitab effectue un test pour déterminer si la variation au sein des données est supérieure ou inférieure à celle attendue, ce qui peut révéler une surdispersion ou une sous-dispersion. Reportez-vous à la section ci-dessus sur les vérifications des données concernant la variation attendue.

S'il existe une sous-dispersion ou une surdispersion des données, les cartes P et U traditionnelles peuvent ne pas fonctionner comme prévu. Une surdispersion peut générer des limites de contrôle trop étroites, entraînant un taux de fausse alarme élevé. Une sous-dispersion peut générer des limites de contrôle trop larges, avec lesquelles vous risquez de ne pas repérer une variation due à une cause spéciale, en la prenant pour une variation due à des causes communes.

Objectif

Notre objectif était de développer une solution alternative aux cartes P et U traditionnelles lorsqu'une surdispersion ou une sous-dispersion est détectée dans les données.

Méthode

Après consultation de la littérature spécialisée, nous sommes arrivés à la conclusion que la meilleure méthode pour pallier la surdispersion et la sous-dispersion était celle fournie par les cartes P' et U' de Laney (Laney, 2002). La méthode de Laney utilise une définition améliorée de la variation des causes communes, qui corrige les limites de contrôle trop étroites (surdispersion) ou trop larges (sous-dispersion).

Dans les cartes de Laney, la variation des causes communes inclut la variation à court terme habituelle à l'intérieur des sous-groupes, mais aussi la variation moyenne à court terme, entre des sous-groupes consécutifs. La variation des causes communes pour les cartes de Laney est calculée en normalisant les données et en utilisant l'étendue mobile moyenne des sous-groupes adjacents (aussi appelée Sigma Z sur les cartes de Laney) pour ajuster les limites de contrôle P ou U standard. La prise en compte de la variation entre les sous-groupes consécutifs permet de corriger les erreurs d'interprétation qui peuvent se produire lorsque la variation entre des sous-groupes est supérieure ou inférieure à celle attendue en raison de fluctuations dans le taux de défauts sous-jacent ou de données qui ne sont pas suffisamment aléatoires.

Une fois la valeur Sigma Z calculée, les données sont transformées de nouveau vers les unités d'origine. L'utilisation des unités initiales des données est avantageuse car si les effectifs des sous-groupes ne sont pas les mêmes, cela permet de faire varier les limites de contrôle, comme dans les cartes P et U traditionnelles. Pour plus de détails sur les cartes P' et U' de Laney, reportez-vous à l'Annexe F.

Les résultats

Minitab vérifie s'il existe une surdispersion ou une sous-dispersion et, si c'est le cas, recommande une carte de Laney P' ou U'.

Références

- AIAG (1995), Statistical process control (SPC) reference manual, Automotive Industry Action Group.
- Bischak, D.P. et Trietsch, D. (2007), The rate of false signals in \bar{X} control charts with estimated limits, *Journal of Quality Technology*, 39, 55–65.
- Bowerman, B.L. et O'Connell, R.T. (1979), *Forecasting and time series: An applied approach*, Belmont, CA : Duxbury Press.
- Chan, L.K., Hapuarachchi, K.P. et Macpherson, B.D. (1988), Robustness of \bar{X} and R charts, *IEEE Transactions on Reliability*, 37, 117–123.
- Davis, R.B. et Woodall, W.H. (1988), Performance of the control chart trend rule under linear shift, *Journal of Quality Technology*, 20, 260–262.
- Jones, G. et Govindaraju, K. (2001), A Graphical Method for Checking Attribute Control Chart Assumptions, *Quality Engineering*, 13(1), 19-26.
- Laney, D. (2002), Improved Control Charts for Attributes, *Quality Engineering*, 14(4), 531-537.
- Montgomery, D.C. (2001), *Introduction to statistical quality control*, 4^{ème} édition, New York : John Wiley & Sons, Inc.
- Schilling, E.G. et Nelson, P.R. (1976), The effect of non-normality on the control limits of \bar{X} charts, *Journal of Quality Technology*, 8, 183–188.
- Trietsch, D. (1999), *Statistical quality control: A loss minimization approach*, Singapour : World Scientific Publishing Co.
- Wheeler, D.J. (2004), *Advanced topics in statistical process control. The power of Shewhart's charts*, 2^{ème} édition, Knoxville, TN : SPC Press.
- Yourstone, S.A. et Zimmer, W.J. (1992), Non-normality and the design of control charts for averages, *Decision Sciences*, 23, 1099–1113.

Annexe A : hypothèses supplémentaires pour les cartes de contrôle aux attributs

Les cartes P et U nécessitent des hypothèses supplémentaires qui ne sont pas prises en compte par les vérifications des données :

Carte P	Carte U
<ul style="list-style-type: none">• Les données sont composées de n éléments distincts, chaque élément étant classé comme défectueux ou non défectueux.• La probabilité qu'un élément soit défectueux est la même pour chaque élément au sein d'un sous-groupe.• La probabilité qu'un élément soit défectueux n'est pas influencée par le fait que l'élément précédent soit défectueux ou non.	<ul style="list-style-type: none">• Les dénombrements portent sur des événements discrets.• Les événements discrets se produisent à l'intérieur d'une zone finie et bien définie de l'espace, du temps ou du produit.• Les événements se produisent indépendamment les uns des autres et la probabilité d'un événement est proportionnelle à la taille du domaine d'opportunité.

Pour chaque carte, les deux premières hypothèses sont inhérentes au procédé de collecte de données, les données mêmes ne peuvent pas être utilisées pour vérifier si ces hypothèses sont satisfaites. La troisième hypothèse ne peut être vérifiée qu'avec une analyse détaillée et avancée des données, analyse que ne réalise pas l'Assistant.

Annexe B : stabilité

Simulation B1 : influence de l'ajout du test 2 au test 1 sur la sensibilité

Le test 1 détecte les points hors contrôle en signalant les points situés à plus de 3 écarts types de la ligne centrale. Le test 2 détecte des décalages dans la proportion d'éléments défectueux ou dans le nombre de défauts par unité en signalant les cas où 9 points consécutifs se trouvent du même côté de la ligne centrale.

Pour déterminer si l'utilisation du test 2 avec le test 1 augmente la sensibilité des cartes aux attributs, nous avons établi des limites de contrôle en nous fondant sur une loi normale (p , $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$) (p est la proportion d'éléments défectueux et n est l'effectif de sous-groupe) pour la carte P et sur une loi normale (u , \sqrt{u}) (u est le nombre moyen de défauts par unité) pour la carte U. Nous avons décalé l'emplacement (p ou u) de chaque distribution par un multiple de l'écart type (EcTyp) et enregistré le nombre de sous-groupes nécessaires pour détecter un signal pour chacune des 10 000 itérations. Les résultats sont affichés dans le tableau 1.

Tableau 1 Nombre moyen de sous-groupes jusqu'à l'échec du test 1 (Test 1), du test 2 (Test 2), ou du test 1 ou 2 (Test 1 ou 2). Le décalage est égal à un multiple de l'écart type (EcTyp).

Décalage	Test 1	Test 2	Test 1 ou 2
0,5 EcTyp	154	84	57
1 EcTyp	44	24	17
1,5 EcTyp	15	13	9
2 EcTyp	6	10	5

Comme indiqué dans le tableau, lorsque les deux tests sont utilisés (Colonne *Test 1 ou 2*), en moyenne, 57 sous-groupes sont nécessaires pour détecter un décalage de 0,5 écart type au niveau de l'emplacement, contre, en moyenne, 154 sous-groupes nécessaires pour détecter un décalage de 0,5 écart type lorsque le test 1 est utilisé seul. Par conséquent, l'utilisation des deux tests augmente significativement la sensibilité et la capacité à détecter de petits décalages dans la proportion d'éléments défectueux, ou le nombre moyen de défauts par unité. Toutefois, au fur et à mesure de l'augmentation du décalage, l'ajout du test 2 n'augmente pas la sensibilité de façon aussi significative.

Annexe C : nombre de sous-groupes

Formule C1 : nombre de sous-groupes requis pour la carte P selon un IC à 95 % pour la limite de contrôle supérieure

Pour déterminer si le nombre de sous-groupes est suffisant afin de garantir que le taux de fausse alarme reste relativement faible, nous suivons la méthode de Bischak (1999) et déterminons le nombre de sous-groupes qui garantira que le taux de fausses alarmes dues au test 1 n'est pas supérieur à 2 %, avec un niveau de confiance de 95 %.

Nous obtenons d'abord p_c tel que

$$p_c + 3 \sqrt{\frac{p_c(1 - p_c)}{n}} = \bar{p} + z_{0,99} \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}}$$

où

p_c = proportion produisant un taux de 1 % de fausses alarmes au-dessus de la limite de contrôle supérieure, en supposant que \bar{p} est la valeur réelle de p . En raison de la symétrie des limites de contrôle, le taux total de fausses alarmes devient 2 % lorsque l'on tient compte des limites de contrôle supérieure et inférieure.

n = effectif de sous-groupe (si l'effectif de sous-groupe varie, c'est l'effectif de sous-groupe moyen qui est utilisé)

\bar{p} = proportion moyenne d'éléments défectueux

z_p = CDF inverse évaluée à $p = 0,95$ pour la loi normale avec moyenne = 0 et écart type = 1

Pour déterminer le nombre de sous-groupes, nous calculons une limite de confiance inférieure à 95 % pour la limite de contrôle supérieure et la fixons à p_c ,

$$p_c = \bar{p} - z_{0,95} \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{nm}}$$

et calculons la valeur m , ce qui donne le résultat suivant :

$$m = \frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n \left(\frac{\bar{p} - p_c}{z_{0,95}}\right)^2}$$

A l'aide de cette formule, nous pouvons déterminer le nombre de sous-groupes nécessaires pour nous assurer que le taux de fausse alarme au-dessus de la limite de contrôle supérieure reste inférieur à 1 %, avec un intervalle de confiance à 95 %, pour plusieurs proportions et effectifs de sous-groupes, comme illustré dans le tableau 2. En raison de la symétrie des

limites de contrôle, le nombre de sous-groupes requis pour garantir que le taux total de fausses alarmes dues au test 1 pour la carte P reste inférieur à 2 %, avec un intervalle de confiance à 95 %, est identique.

Tableau 2 Nombre de sous-groupes (m) correspondant à divers effectifs de sous-groupes (n) et proportions (\bar{p})

Effectif de sous-groupe (n)	\bar{p}				
	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1
10	1881	421	228	60	35
50	425	109	64	23	16
100	232	65	41	17	13
150	165	49	32	14	11
200	131	41	27	13	10
500	65	24	18	10	9

Remarque Pour les cartes de contrôle des variables, nous avons limité le taux total de fausses alarmes dues au test 1 à 1 %. Pour les cartes aux attributs, pour des raisons pratiques, nous avons modéré le critère, le définissant sur 2 %. Dans de nombreux cas, la proportion d'éléments défectueux sur la carte P est faible, ce qui, conformément au tableau 2, nécessite un nombre extrêmement important de sous-groupes pour obtenir une grande précision.

Formule C2 : nombre de sous-groupes requis pour la carte U selon un IC à 95 % pour la limite de contrôle supérieure

Nous avons utilisé la même approche que celle que nous avons utilisée ci-dessus pour la carte P. Conformément à la méthode Trietsch (1999), nous déterminons le nombre de sous-groupes qui garantira que le taux total de fausses alarmes dues au test 1 n'est pas supérieur à 2 %, avec un intervalle de confiance à 95 %.

Nous commençons par déterminer la valeur c_c de la façon suivante

$$c_c + 3\sqrt{c_c} = \bar{c} + z_{0,99}\sqrt{\bar{c}}$$

c_c = nombre moyen de défauts par sous-groupe produisant un taux de fausse alarme au-dessus de la limite de contrôle supérieure de 1 %, en supposant que \bar{c} est la valeur réelle de c . En raison de la symétrie des limites de contrôle, le taux total de fausses alarmes dues au test 1 passe à 2 % lorsque les limites supérieure et inférieure sont combinées.

\bar{c} = nombre moyen de défauts par sous-groupe (si l'effectif de sous-groupe varie, c'est l'effectif de sous-groupe moyen qui est utilisé)

z_p = CDF inverse évaluée à $p = 0,95$ pour la loi normale avec moyenne = 0 et écart type = 1

Pour déterminer le nombre de sous-groupes, nous calculons une limite de confiance inférieure à 95 % pour la limite de contrôle supérieure et la fixons à c_c ,

$$c_c = \bar{c} - z_{0,95} \sqrt{\frac{\bar{c}}{m}}$$

et nous calculons la valeur m , ce qui donne les résultats suivants :

$$m = \frac{\bar{c}}{\left(\frac{\bar{c} - c_c}{z_{0,95}}\right)^2}$$

Certains résultats basés sur les calculs ci-dessus sont présentés dans le tableau 3.

Tableau 3 Nombre de sous-groupes (m) correspondant à différentes valeurs du nombre moyen de défauts par sous-groupe (\bar{c})

\bar{c}	0,1	0,3	0,5	0,7	1,0	3,0	5,0	10,0	30,0	50,0
Nombre de sous-groupes	232	95	65	52	41	22	18	14	10	9

Remarque Pour les cartes de contrôle par variables, nous avons limité le taux de fausses alarmes dues au test 1 à 1 %. Pour les cartes aux attributs, nous avons modéré le critère, le définissant sur 2 %, pour des raisons pratiques. Dans de nombreux cas, le nombre de défauts par sous-groupe est faible, ce qui, conformément au tableau 3, nécessite un nombre extrêmement important de sous-groupes pour obtenir une grande précision.

Annexe D : effectif de sous-groupe

Le théorème de la limite centrale établit que la loi normale fournit une approximation de la loi de distribution de la moyenne d'une variable aléatoire, indépendante et distribuée de façon identique. Pour la carte P, \hat{p} (proportion du sous-groupe) est la moyenne d'une variable aléatoire, indépendante et distribuée de façon identique selon la loi de Bernoulli. Pour la carte U, \hat{u} (taux du sous-groupe) est la moyenne d'une variable aléatoire, indépendante, et distribuée de façon identique selon la loi de Poisson. Par conséquent, la loi normale peut être utilisée en tant qu'approximation dans les deux cas.

Plus l'effectif des sous-groupes augmente, plus l'approximation est exacte. L'approximation est également meilleure lorsque la proportion d'éléments défectueux (carte P) ou le nombre de défauts par unité (carte U) est plus élevé. Lorsque l'effectif des sous-groupes est faible ou que les valeurs de p (carte P) ou de u (carte U) sont petites, les lois de distribution de \hat{p} et \hat{u} présentent une asymétrie vers la droite, ce qui augmente le taux de fausse alarme. Par conséquent, nous pouvons évaluer l'exactitude de l'approximation selon la loi normale en observant le taux de fausse alarme et déterminer l'effectif de sous-groupe minimal nécessaire à l'obtention d'une approximation selon la loi normale adéquate.

Pour ce faire, nous avons réalisé des simulations visant à évaluer les taux de fausse alarme obtenus avec plusieurs effectifs de sous-groupes pour la carte P et la carte U ; nous avons ensuite comparé ces résultats au taux de fausse alarme attendu sous l'hypothèse normale (0,27 % pour le test 1 et 0,39 % pour le test 2).

Simulation D1 : relation entre l'effectif de sous-groupe, la proportion et le taux de fausse alarme de la carte P

Nous avons établi les limites de contrôle pour plusieurs effectifs de sous-groupes (n) et proportions (p) à l'aide d'un ensemble initial de 10 000 sous-groupes. Nous avons également enregistré le pourcentage de fausses alarmes pour 2 500 sous-groupes supplémentaires. Nous avons ensuite réalisé 10 000 itérations et calculé le pourcentage moyen de fausses alarmes à partir du test 1 et du test 2, comme présenté dans le tableau 4.

Tableau 4 % fausses alarmes dues au test 1, test 2 (np) pour plusieurs effectifs de sous-groupe (n) et proportions (p)

Effectif de sous-groupe (n)	p				
	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1
10	0,99, 87,37 (0,01)	4,89, 62,97 (0,05)	0,43, 40,14 (0,1)	1,15, 1,01 (0,5)	1,28, 0,42 (1)
50	4,88, 63,00 (0,05)	2,61, 10,41 (0,25)	1,38, 1,10 (0,5)	0,32, 0,49 (2,5)	0,32, 0,36 (5)
100	0,47, 40,33 (0,10)	1,41, 1,12 (0,5)	1,84, 0,49 (1)	0,43, 0,36 (5)	0,20, 0,36 (10)

Effectif de sous-groupe (n)	p				
	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1
150	1,01, 25,72 (0,15)	0,71, 0,43 (0,75)	0,42, 0,58 (1,5)	0,36, 0,42 (7,5)	0,20, 0,36 (15)
200	1,74, 16,43 (0,2)	1,86, 0,50 (1,00)	0,43, 0,41 (2)	0,27, 0,36 (10)	0,34, 0,36 (20)
500	1,43, 1,12 (0,5)	0,42, 0,50 (2,5)	0,52, 0,37 (5)	0,32, 0,37 (25)	0,23, 0,36 (50)

Les résultats du tableau 4 indiquent que le pourcentage de fausses alarmes est en général maximal lorsque la proportion (p) est faible (0,001 ou 0,005), ou lorsque l'effectif d'échantillon est faible (n = 10). Par conséquent, le pourcentage de fausses alarmes est maximal lorsque la valeur du produit np est faible et il est minimal lorsque la valeur np est élevée. Lorsque la valeur np est supérieure ou égale à 0,5, le taux de fausse alarme combiné pour les tests 1 et 2 est inférieur à une valeur approximative de 2,5 %. En revanche, pour des valeurs de np inférieures à 0,5, le taux de fausse alarme combiné pour les tests 1 et 2 peut être beaucoup plus élevé, atteignant des niveaux bien supérieurs à 10 %. Ainsi, les performances de la carte P sont adaptées lorsque la valeur de np est supérieure ou égale à 0,5. L'effectif du sous-groupe doit donc être d'au moins $\frac{0,5}{\bar{p}}$.

Simulation D2 : relation entre l'effectif de sous-groupe, le nombre de défauts par unité et le taux de fausse alarme de la carte U

Nous avons établi les limites de contrôle pour plusieurs effectifs de sous-groupe (n) et nombres de défauts par sous-groupe (c) à l'aide d'un ensemble initial de 10 000 sous-groupes. Nous avons également enregistré le pourcentage de fausses alarmes pour 2 500 sous-groupes supplémentaires. Nous avons ensuite réalisé 10 000 itérations et calculé le pourcentage moyen de fausses alarmes à partir du test 1 et du test 2, tel qu'indiqué dans le tableau 5.

Tableau 5 % fausses alarmes dues au test 1, test 2 pour plusieurs nombres de défauts par sous-groupe (c = nu)

c	0,1	0,3	0,5	0,7	1,0	3,0	5,0	10,0	30,0	50
% fausses alarmes	0,47, 40,40	3,70, 6,67	1,44, 1,13	0,57, 0,39	0,36, 0,51	0,38, 0,40	0,54, 0,38	0,35, 0,37	0,29, 0,37	0,25, 0,37

Les résultats du tableau 5 montrent que le pourcentage de fausses alarmes est plus élevé lorsque le produit de l'effectif de sous-groupe (n) et du nombre de défauts par unité (u), qui est égal au nombre de défauts par sous-groupe (c), est faible. Lorsque c'est supérieur ou égal à 0,5, le taux de fausse alarme combiné pour les tests 1 et 2 est inférieur à une valeur approximative de 2,5 %. En revanche, pour des valeurs de c inférieures à 0,5, le taux de

fausse alarme combiné pour les tests 1 et 2 peut être beaucoup plus élevé, atteignant des niveaux bien supérieurs à 10 %. Ainsi, en se fondant sur ce critère, les performances de la carte U sont adaptées lorsque la valeur $c = nu$ est supérieure ou égale à 0,5. L'effectif du sous-groupe doit donc être d'au moins $\frac{0,5}{\bar{u}}$.

Annexe E : surdispersion/sous-dispersion

Soit d_i le nombre de défectueux du sous-groupe i et n_i l'effectif de sous-groupe.

Ils nous faut d'abord normaliser les nombres de défectueux. Pour rendre compte des éventuelles différences d'effectifs de sous-groupes, utilisez les nombres de défectueux ajustés ($d_{i\text{-ajust}}$) :

$d_{i\text{-ajust}}$ = nombre ajusté de défectueux pour le sous-groupe $i = \frac{d_i}{n_i}(\bar{n})$, où

\bar{n} = effectif de sous-groupe moyen

$$X_i = \sin^{-1} \sqrt{\frac{d_{i\text{-ajust}} + 3/8}{\bar{n} + 0,75}}$$

L'écart type des nombres normalisés (X_i) sera égal à $\frac{1}{\sqrt{4 * \bar{n}}}$. Cela signifie que la valeur de 2 écarts types est égale à $\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$.

Créez ensuite une droite de Henry standard en utilisant les nombres normalisés en tant que données. Une droite de régression est ajustée en utilisant uniquement les 50 % de points de diagramme se situant le plus au milieu. Trouvez les 25ème et 75ème percentiles des données sur les nombres transformés et utilisez toutes les paires X-Y supérieures ou égales au 25ème percentile et inférieures ou égales au 75ème percentile. Cette droite est utilisée pour obtenir les valeurs prévues des nombres transformés correspondant aux valeurs Z de -1 et +1. Les données "Y" de cette régression sont les scores normaux des nombres transformés et les données "X" sont les nombres transformés.

Calculez la variation observée comme suit :

Soit $Y(-1)$ le nombre transformé prévu pour $Z = -1$

Soit $Y(+1)$ le nombre transformé prévu pour $Z = +1$

Estimation observée de 2 écarts types = $Y(+1) - Y(-1)$.

Calculez la variation attendue comme suit :

Estimation attendue de 2 écarts types = $\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$

Calculez le rapport entre la variation observée et la variation attendue et convertissez-le en pourcentage. Si ce pourcentage est supérieur à 130 %, que plus de 2 % des points sont situés en dehors des limites de contrôle et que le nombre de points situés en dehors des limites de contrôle est supérieur à 1, vous pouvez considérer qu'il y a surdispersion. Si le pourcentage est inférieur à 75 %, vous pouvez considérer qu'il y a sous-dispersion.

Annexe F : cartes de Laney (P' et U')

Le principe des cartes P' et U' de Laney est de rendre compte des cas où la variation observée entre les sous-groupes ne correspond pas à la variation attendue lorsque les données des sous-groupes proviennent d'un procédé aléatoire présentant un taux constant de défectueux ou de défauts. Tous les procédés présentent normalement de petits changements dans leur taux de défauts ou de défectueux sous-jacent. Lorsque les effectifs de sous-groupe sont relativement faibles, la variation d'échantillonnage au sein des sous-groupes est assez grande pour que ces modifications ne soient pas visibles. Plus les effectifs de sous-groupe augmentent, plus cette variation d'échantillonnage diminue, et les petits changements du taux sous-jacent de défectueux ou de défauts deviennent suffisamment importants pour influencer sur les cartes P et U standard, accroissant le taux de fausse alarme. Dans certains exemples les taux de fausse alarme atteignaient 70 %. Cette condition est connue sous le nom de surdispersion.

Une méthode alternative a été développée pour remédier à ce problème et consiste à normaliser les valeurs p ou u des sous-groupes et à modéliser les données normalisées dans une carte I. La carte I utilise une étendue mobile des valeurs normalisées pour déterminer les limites de contrôle. Ainsi, la méthode utilisant la carte I modifie la définition de la variation des causes communes en y ajoutant la variation du taux de défectueux ou de défauts entre deux sous-groupes consécutifs.

La méthode de Laney transforme de nouveau les données vers les unités d'origine. L'avantage de cette méthode est que si les sous-groupes n'ont pas tous le même effectif, les limites de contrôle ne seront pas fixes, comme elles le sont avec la méthode de la carte I.

Les cartes P' et U' associent la nouvelle définition de la variation des causes communes et les limites de contrôle que l'on attendrait pour la variable avec différents effectifs de sous-groupes. Ainsi, l'hypothèse clé pour ces cartes tient à une modification de la définition de la variation de causes communes : elle inclue la variation habituelle à court terme au sein des sous-groupes, mais aussi la variation moyenne à court terme à laquelle on peut s'attendre entre des sous-groupes consécutifs.

Carte P' de Laney

Soit

X_i = nombre de défectueux dans le sous-groupe i

n_i = effectif du sous-groupe i

p_i = proportion de défectueux dans le sous-groupe i

$$\bar{p} = \frac{\sum X_i}{\sum n_i}$$

$$\sigma p_i = \sqrt{\frac{\bar{p} * (1 - \bar{p})}{n_i}}$$

Convertissez d'abord p_i en scores de Z :

$$Z_i = \frac{p_i - \bar{p}}{\sigma p_i}$$

Une étendue mobile de longueur 2 est ensuite utilisée pour évaluer la variation dans les scores de Z et calculer Sigma Z (σ_z).

$$\sigma_z = \frac{\overline{EM}}{1,128}$$

où 1,128 est une constante de correction de biais.

Remettez les données à l'échelle d'origine :

$$p_i = \bar{p} + \sigma p_i * \sigma_z$$

L'écart type de p_i est donc :

$$sd(p_i) = \sigma p_i * \sigma_z$$

Les limites de contrôle et la ligne centrale sont calculées comme suit :

$$\text{Ligne centrale} = \bar{p}$$

$$\text{LCS} = \bar{p} + 3 * sd(p_i)$$

$$\text{LCI} = \bar{p} - 3 * sd(p_i)$$

Carte U' de Laney

Soit

X_i = nombre de défectueux dans le sous-groupe i

n_i = effectif du sous-groupe i

u_i = proportion de défectueux dans le sous-groupe i

$$\bar{u} = \frac{\sum X_i}{\sum n_i}$$

$$\sigma u_i = \sqrt{\frac{\bar{u} * (1 - \bar{u})}{n_i}}$$

Convertissez d'abord p_i en scores de Z :

$$Z_i = \frac{u_i - \bar{u}}{\sigma u_i}$$

Une étendue mobile de longueur 2 est ensuite utilisée pour évaluer la variation dans les scores de Z et calculer Sigma Z (σ_z).

$$\sigma_z = \frac{\overline{EM}}{1,128}$$

où 1,128 est une constante de correction de biais.

Remettez les données à l'échelle d'origine :

$$u_i = \bar{u} + \sigma u * \sigma z$$

L'écart type de pi est donc :

$$sd(u_i) = \sigma u_i * \sigma z$$

Les limites de contrôle et la ligne centrale sont calculées comme suit :

$$\text{Ligne centrale} = \bar{u}$$

$$\text{LCS} = \bar{u} + 3 * sd(u_i)$$

$$\text{LCI} = \bar{u} - 3 * sd(u_i)$$

© 2015, 2017 Minitab Inc. All rights reserved.

Minitab®, Quality. Analysis. Results.® and the Minitab® logo are all registered trademarks of Minitab, Inc., in the United States and other countries. See minitab.com/legal/trademarks for more information.