

# Capabilité binomiale et capabilité de Poisson

## Généralités

L'analyse de capabilité permet de déterminer si un procédé est en mesure de produire des résultats répondant aux exigences des clients. Lorsqu'il est impossible de représenter la qualité d'un produit ou d'un service à l'aide de données continues, cette qualité est souvent évaluée sur la base de données d'attribut. L'Assistant de Minitab dispose de deux analyses permettant d'étudier la capabilité d'un procédé à l'aide de données d'attribut :

- Capabilité binomiale : cette analyse est utilisée lorsqu'un produit ou un service est caractérisé par le statut défectueux ou non défectueux. L'analyse de capabilité binomiale évalue la possibilité ( $p$ ) qu'un élément sélectionné dans un procédé soit défectueux. Les données collectées sont le nombre d'éléments défectueux au sein de sous-groupes individuels, supposé obéir à une loi binomiale avec le paramètre  $p$ .
- Capabilité de Poisson : cette analyse est utilisée lorsqu'un produit ou un service peut avoir plusieurs défauts et que l'on compte le nombre de défauts sur chaque élément. La capabilité de Poisson évalue le nombre de défauts par unité. Lors de la collecte des données, on relève le nombre total de défauts de  $k$  unités contenues dans des sous-groupes individuels, supposé obéir à une loi de Poisson, avec un nombre de défauts moyen par unité ( $u$ ) inconnu.

Pour estimer la capabilité du procédé actuel de façon appropriée et obtenir une prévision fiable de la capabilité du procédé dans le futur, les données utilisées doivent provenir d'un procédé stable (Bothe, 1991 ; Kotz et Johnson, 2002). En outre, le nombre de sous-groupes collectés dans le temps doit être suffisamment grand pour que les estimations soient représentatives de la capabilité du procédé sur une longue période. Même si un procédé est maîtrisé, il peut faire l'objet de modifications environnementales et de saisie au fil du temps. Par conséquent, l'utilisation d'un nombre adapté de sous-groupes peut vous permettre de prendre en compte les différentes sources de variation dans le temps (Bothe, 1997 ; AIAG, 1995). Pour finir, vous devez collecter suffisamment de données pour assurer que les

statistiques de capabilité sont assez précises, tel qu'indiqué par la largeur de l'intervalle de confiance fourni par les deux analyses pour la mesure de capabilité clé.

Pour satisfaire à ces exigences, le rapport de l'Assistant applique automatiquement les contrôles suivants à vos données :

- Stabilité du procédé
  - Tests des causes spéciales
  - Effectif des sous-groupes
- Nombre de sous-groupes
- Variation attendue
- Quantité de données

Dans ce document, nous étudions l'importance de ces exigences pour l'analyse de capabilité en pratique et décrivons comment nous avons établi notre méthode de contrôle de ces conditions dans l'Assistant.

Nous présentons également les cartes P' et U' de Laney qui sont recommandées lorsque la variation observée dans les données ne correspond pas à la variation attendue et que Minitab détecte une surdispersion ou une sous-dispersion.

**Remarque :** Les analyses de capabilité binomiale et de Poisson utilisent respectivement les cartes de contrôle aux attributs P et U, pour vérifier la stabilité du procédé. Ces deux cartes dépendent d'hypothèses supplémentaires qui ne peuvent pas être vérifiées, ou qui sont difficiles à vérifier. Pour plus de détails, reportez-vous à l'Annexe A.

# Vérification des données

## Stabilité (partie I) - Test des causes spéciales

Pour estimer avec exactitude la capabilité du procédé, vos données doivent provenir d'un procédé stable. Vous devez vérifier la stabilité de votre procédé avant d'en évaluer la capabilité. Si le procédé n'est pas stable, vous devez identifier et éliminer les causes de l'instabilité.

Les cartes P et U sont les cartes de contrôle aux attributs les plus largement utilisées pour évaluer la stabilité d'un procédé. La carte P représente la proportion d'éléments défectueux par sous-groupe et s'applique à des données obéissant à une loi binomiale. La carte U représente le nombre de défauts par unité et s'applique aux données obéissant à une loi de Poisson. Quatre tests peuvent être réalisés sur ces cartes pour évaluer la stabilité du procédé. L'utilisation simultanée de ces tests augmente la sensibilité de la carte de contrôle. Cependant, il est important de déterminer l'objectif et la valeur ajoutée de chaque test car plus vous ajoutez de tests à la carte de contrôle, plus le taux de fausse alarme augmente.

### Objectif

Nous souhaitons déterminer les tests de stabilité à inclure, parmi les quatre, pour les cartes de contrôle aux attributs dans l'Assistant. Notre premier objectif était d'identifier les tests qui augmentaient de façon significative la sensibilité aux situations non maîtrisées sans augmenter de façon significative le taux de fausse alarme. Notre second objectif était d'assurer la simplicité et l'aspect pratique des cartes.

### Méthode

Les quatre tests de stabilité des cartes aux attributs correspondent aux tests 1 à 4 des causes spéciales pour les cartes de contrôle des variables. Avec un effectif de sous-groupe adapté, la proportion d'éléments défectueux (carte P), ou le nombre de défauts par unité (carte U) suivent une loi normale. Par conséquent, des simulations effectuées pour des cartes de contrôle des variables à partir de données normales produiront des résultats identiques en ce qui concerne la sensibilité et le taux de fausse alarme des tests. Nous nous sommes donc fondés sur les résultats d'une telle simulation et sur une vue d'ensemble des publications consacrées aux cartes de contrôle des variables pour évaluer l'influence des quatre tests de stabilité sur la sensibilité et le taux de fausse alarme des cartes aux attributs. De plus, nous avons évalué la prévalence de causes spéciales associées au test. Pour plus de détails sur les méthodes utilisées pour chaque test, consultez la section des résultats ci-dessous et l'Annexe B.

## Les résultats

Des quatre tests utilisés pour évaluer la stabilité dans les cartes aux attributs, nous avons constaté que les tests 1 et 2 sont les plus utiles :

TEST 1 : IDENTIFIE LES POINTS EN DEHORS DES LIMITES DE CONTROLE

Le test 1 identifie les points se trouvant à plus de 3 écarts types de la ligne centrale. Le test 1 est universellement reconnu comme nécessaire pour la détection de situations non maîtrisées. Son taux de fausse alarme est seulement de 0,27 %.

TEST 2 : IDENTIFIE DES DECALAGES DANS LA PROPORTION D'ELEMENTS DEFECTUEUX (CARTE P) OU DANS LE NOMBRE MOYEN DE DEFAUTS PAR UNITE (CARTE U)

Le test 2 vérifie si 9 points consécutifs se trouvent du même côté de la ligne centrale. Nous avons réalisé une simulation pour déterminer le nombre de sous-groupes nécessaires pour détecter un signal indiquant un décalage dans la proportion d'éléments défectueux (carte P) ou dans le nombre moyen de défauts par unité (carte U). Nous avons constaté que l'ajout du test 2 augmente de façon significative la sensibilité de la carte à de petits décalages dans la proportion d'éléments défectueux ou dans le nombre moyen de défauts par unité. Lorsque les tests 1 et 2 sont utilisés conjointement, le nombre de sous-groupes nécessaires pour détecter un petit décalage dans la moyenne est bien moindre que lorsque le test 1 est utilisé seul. Ainsi, l'ajout du test 2 favorise la détection de situations communes de données non maîtrisées et offre un gain de sensibilité suffisant pour justifier une légère augmentation du taux de fausse alarme.

## Tests non inclus dans l'Assistant

TEST 3 : K POINTS CONSECUTIFS, TOUS CROISSANTS OU TOUS DECROISSANTS

Le test 3 est conçu pour détecter des glissements dans la proportion d'éléments défectueux ou dans le nombre moyen de défauts par unité (David et Woodall, 1988). Cela dit, l'utilisation du test 3 en plus du test 1 et du test 2 n'augmente pas de façon significative la sensibilité de la carte. Comme nous avons déjà décidé d'utiliser les tests 1 et 2 en nous fondant sur les résultats de nos simulations, l'ajout du test 3 n'apportera pas de valeur significative à la carte.

TEST 4 : K POINTS CONSECUTIFS, CROISSANTS ET DECROISSANTS EN ALTERNANCE.

Bien que ce schéma puisse se produire en pratique, nous vous recommandons de rechercher toute tendance ou schéma aberrants, plutôt qu'un schéma spécifique.

## Stabilité (partie II) - Effectif des sous-groupes

Bien que les cartes P et U surveillent la stabilité du procédé à l'aide de données d'attribut, la loi normale est utilisée pour obtenir une approximation par une loi de distribution de la proportion des éléments défectueux ( $\hat{p}$ ) dans la carte P et de la loi de distribution du nombre de défauts par unité ( $\hat{u}$ ) dans la carte U. Plus l'effectif des sous-groupes est élevé, plus cette approximation est exacte. Etant donné que les critères des tests utilisés dans chaque carte de contrôle se fondent sur la loi normale, augmenter l'effectif des sous-groupes pour obtenir une meilleure approximation par une loi normale permet aussi d'améliorer la capacité de la carte à identifier avec exactitude les situations non maîtrisées et de réduire le taux de fausse

alarme. Lorsque la proportion d'éléments défectueux ou le nombre de défauts par unité est bas, vos sous-groupes doivent être plus grands pour garantir des résultats exacts.

## Objectif

Nous souhaitons déterminer l'effectif de sous-groupe nécessaire pour garantir que l'approximation par une loi normale est suffisamment adaptée pour obtenir des résultats exacts pour la carte P et la carte U.

## Méthode

Nous avons réalisé des simulations pour évaluer les taux de fausse alarme avec plusieurs effectifs de sous-groupes pour plusieurs proportions ( $p$ ) (pour la carte P) et plusieurs nombres moyens de défauts par sous-groupe ( $c$ ) (pour la carte U). Pour déterminer si l'effectif des sous-groupes était assez grand pour obtenir une approximation par une loi normale adaptée et donc un taux de fausse alarme assez bas, nous avons comparé ces résultats au taux de fausse alarme prévu sous l'hypothèse normale (0,27 % pour le test 1 et 0,39 % pour le test 2). Pour plus de détails, reportez-vous à l'Annexe C.

## Les résultats

### CARTE P




Nos recherches ont démontré que l'effectif de sous-groupe nécessaire pour la carte P dépendait de la proportion d'éléments défectueux ( $p$ ). Plus la valeur de  $p$  est petite, plus l'effectif de sous-groupe ( $n$ ) nécessaire est important. Lorsque le produit  $np$  est supérieur ou égal à 0,5, le taux de fausse alarme combiné pour les tests 1 et 2 est inférieur à une valeur approximative de 2,5 %. En revanche, lorsque le produit  $np$  est inférieur à 0,5, le taux de fausse alarme combiné pour les tests 1 et 2 peut être beaucoup plus élevé, atteignant des niveaux bien supérieurs à 10 %. Ainsi, en se fondant sur ce critère, les performances de la carte P sont adaptées lorsque la valeur de  $np$  est supérieure ou égale à 0,5.

### CARTE U




Nos recherches ont démontré que l'effectif de sous-groupe nécessaire pour la carte U dépendait du nombre de défauts par sous-groupe ( $c$ ), qui est égal à l'effectif du sous-groupe ( $n$ ) multiplié par le nombre de défauts par unité ( $u$ ). Le pourcentage de fausse alarme est plus élevé lorsque le nombre de défauts est petit. Lorsque  $c = nu$  est supérieur ou égal à 0,5, le taux de fausse alarme combiné pour les tests 1 et 2 est inférieur à une valeur approximative de 2,5 %. En revanche, pour des valeurs de  $c$  inférieures à 0,5, le taux de fausse alarme combiné pour les tests 1 et 2 peut être beaucoup plus élevé, atteignant des niveaux bien supérieurs à 10 %. Ainsi, en se fondant sur ce critère, les performances de la carte U sont adaptées lorsque la valeur  $c = nu$  est supérieure ou égale à 0,5.

Conformément aux résultats indiqués ci-dessus pour les tests des causes spéciales (partie I) et l'effectif de sous-groupe (partie II), le rapport de l'Assistant affiche les indicateurs d'état suivants lors du test de la stabilité dans les cartes de contrôle aux attributs utilisées dans les analyses de capabilité binomiale et de Poisson :

## Carte P - Capabilité binomiale

Etat	Condition
	Aucun échec au test 1 ou au test 2 sur la carte et $n_i \bar{p} \geq 0,5$ pour tous les $i$ avec $n_i$ = effectif du ième sous-groupe $\bar{p}$ = proportion moyenne d'éléments défectueux
	Le test 1 ou le test 2 révèle au moins un point hors contrôle, ce qui peut être dû à des causes spéciales.
	L'effectif du sous-groupe peut être trop petit. $n_i \bar{p} < 0,5$ pour au moins un $i$

## Carte U - Capabilité de Poisson

Etat	Condition
	Aucun échec au test 1 ou au test 2 sur la carte et $n_i \bar{u} \geq 0,5$ pour tous les $i$ avec $n_i$ = effectif du ième sous-groupe $\bar{u}$ = nombre moyen de défauts par unité
	Le test 1 ou le test 2 révèle au moins un point hors contrôle, ce qui peut être dû à des causes spéciales.
	L'effectif du sous-groupe peut être trop petit. $n_i \bar{u} < 0,5$ pour au moins un $i$

## Nombre de sous-groupes

Pour s'assurer que les estimations de capabilité reflètent avec exactitude la totalité de votre procédé, vous devez tâcher d'identifier toutes les sources probables de variation de votre procédé au fil du temps. En augmentant le nombre de sous-groupes que vous collectez, vous avez des chances d'augmenter la possibilité d'identifier les différentes sources de variation. La collecte d'un nombre adapté de sous-groupes permet également d'améliorer la précision des limites des cartes de contrôle utilisées pour évaluer la stabilité de votre procédé. Cela dit, la collecte de davantage de sous-groupes demande plus de temps et de ressources et, par conséquent, il est important de savoir de quelle façon le nombre de sous-groupes influe sur la fiabilité des estimations de capabilité.

## Objectif

Nous avons étudié le nombre de sous-groupes nécessaires pour représenter le procédé de façon adaptée et fournir une estimation fiable de la sa capabilité.


## Méthode

Nous avons consulté les publications spécialisées pour connaître le nombre de sous-groupes considéré comme adapté pour l'estimation de la capabilité d'un procédé.

## Les résultats

Selon le manuel Statistical Process Control (SPC), le nombre de sous-groupes que vous devez collecter dépend de la durée nécessaire pour collecter des données susceptibles de prendre en compte les différentes sources de variation de votre procédé (AIAG, 1995). En d'autres termes, vous devez collecter autant de sous-groupes que nécessaire pour représenter de façon adaptée la totalité de votre procédé. En général, pour fournir des tests de stabilité exacts et une estimation fiable des performances de procédé, AIAG (1995) recommande la collecte d'au moins 25 sous-groupes.

Conformément à ces recommandations, le rapport de l'Assistant affiche l'indicateur d'état suivant lors de la vérification du nombre de sous-groupes pour les analyses de capabilité binomiale ou de Poisson :

Etat	Condition
	<p><b>Nombre de sous-groupes <math>\geq 25</math></b></p> <p>Le nombre de sous-groupes doit être suffisant pour identifier différentes sources de variation de procédé lorsqu'ils sont collectés sur un laps de temps adapté.</p> <p><b>Nombre de sous-groupes <math>&lt; 25</math></b></p> <p>Il est généralement recommandé de collecter au moins 25 sous-groupes sur un laps de temps adapté pour identifier différentes sources de variation de procédé.</p>

## Variation attendue

Les cartes P et U traditionnellement utilisées pour déterminer la stabilité du procédé avant d'évaluer sa capabilité, supposent que la variation des données suit une loi binomiale pour les éléments défectueux, ou une loi de Poisson pour le nombre de défauts. Les cartes supposent également que votre taux de défectueux ou de défauts reste constant dans le temps. Si la variation au sein des données est supérieure ou inférieure à celle attendue, il se peut que vos données soient sous-dispersées ou surdispersées et que les cartes ne fonctionnent pas comme prévu.

### Surdispersion

On parle de surdispersion lorsque la variation au sein des données est supérieure à celle attendue. Généralement, le taux de défectueux ou de défauts présente des variations au cours du temps, en raison de facteurs de bruit externe qui ne sont pas des causes spéciales. Dans la plupart des applications de ces cartes, la variation d'échantillonnage des statistiques

de sous-groupe est suffisamment importante pour que la variation dans le taux de défectueux ou de défauts sous-jacent ne soit pas visible. Néanmoins, plus les effectifs des sous-groupes augmentent, plus la variation d'échantillonnage diminue, si bien que, passé un certain point, la variation dans le taux de défauts sous-jacent peut devenir plus grande que la variation d'échantillonnage. Cela produit une carte avec des limites de contrôle extrêmement étroites et un taux de fausse alarme très élevé.

### Sous-dispersion

On parle de sous-dispersion lorsque la variation au sein des données est inférieure à celle attendue. Cela peut se produire lorsque des sous-groupes adjacents sont corrélés les uns avec les autres. On appelle également ce phénomène autocorrélation. Par exemple, à mesure qu'un outil s'use, le nombre de défauts peut s'accroître. L'augmentation du nombre de défauts dans les sous-groupes peut alors les rendre plus semblables qu'ils ne le seraient du simple fait du hasard. Lorsque les données affichent une sous-dispersion, les limites de contrôle d'une carte P ou d'une carte U traditionnelle peuvent être trop larges. Si les limites de contrôle sont trop larges, la carte signalera rarement des anomalies, et vous risquez de ne pas repérer une variation due à une cause spéciale, en la prenant pour une variation due à des causes communes.

Si la surdispersion ou la sous-dispersion est assez importante, Minitab recommande l'utilisation d'une carte de Laney P' ou U'. Pour plus d'informations, reportez-vous à la section Cartes P' et U' de Laney ci-dessous.

### Objectif

Nous souhaitons définir une méthode pour détecter une surdispersion ou une sous-dispersion au sein des données.

### Méthode

En étudiant les publications spécialisées, nous avons trouvé plusieurs méthodes pour détecter la surdispersion et la sous-dispersion. Nous avons sélectionné une méthode de diagnostic trouvée chez Jones et Govindaraju (2001). Cette méthode utilise un diagramme de probabilité pour déterminer la variation attendue avec des données obéissant à une loi binomiale (pour les données sur les défectueux) ou à une loi de Poisson (pour les données sur les défauts). On compare ensuite la variation attendue à la variation observée. Pour plus de détails sur la méthode de diagnostic, reportez-vous à l'Annexe D.

Pour vérifier la présence d'une surdispersion, Minitab détermine aussi le nombre de points situés en dehors des limites de contrôle dans les cartes P et U traditionnelles. La surdispersion ayant pour effet de générer un taux de fausse alarme élevé, si seul un petit pourcentage de points est hors contrôle, il est peu probable qu'il existe un problème de surdispersion des données.

### Les résultats

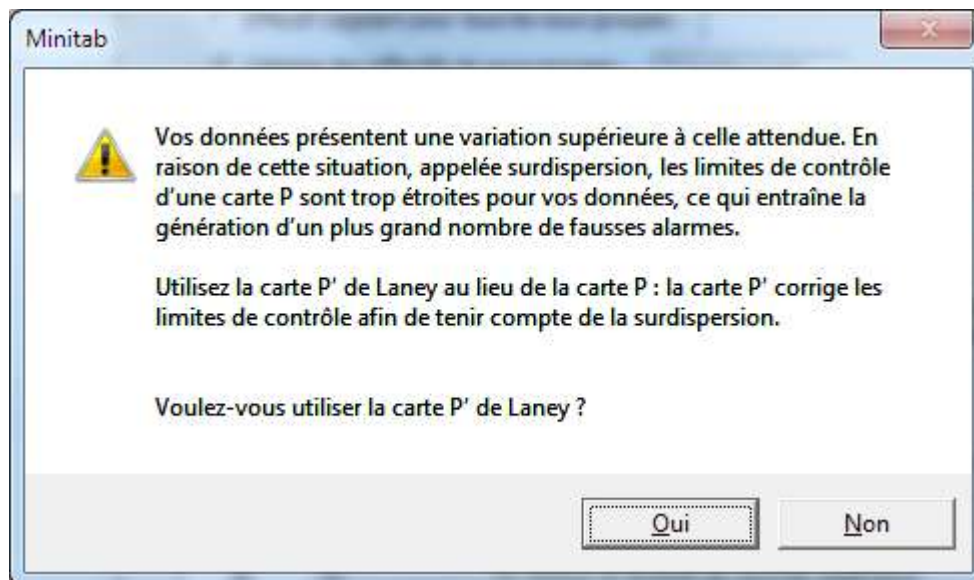
Minitab effectue le test de diagnostic pour la surdispersion et la sous-dispersion une fois que l'utilisateur a sélectionné OK dans la boîte de dialogue de la carte P ou U, avant l'affichage de la carte.



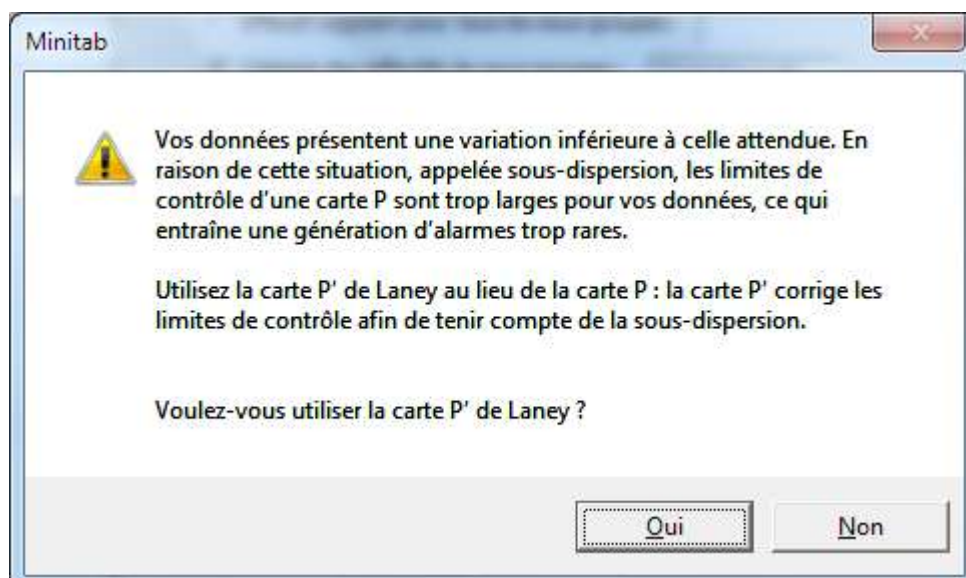
Il y a surdispersion dans les conditions suivantes :

- Le rapport entre la variation observée et la variation attendue est supérieur à 130 %.
- Plus de 2 % des points se trouvent en dehors des limites de contrôle.
- Le nombre de points situés en dehors des limites de contrôle est supérieur à 1.

Si une surdispersion est détectée, Minitab affiche un message demandant à l'utilisateur s'il souhaite afficher une carte P' ou U' de Laney. Le message affiché pour la carte P' est affiché ci-dessous :





Il y a sous-dispersion lorsque le rapport entre la variation observée et la variation attendue est inférieur à 75 %. Si une sous-dispersion est détectée, Minitab affiche un message demandant à l'utilisateur s'il souhaite afficher une carte P' ou U' de Laney. Le message affiché pour la carte P' est affiché ci-dessous :



Si l'utilisateur choisit d'utiliser la carte de Laney, Minitab affiche les cartes de Laney dans le rapport de diagnostic. Si l'utilisateur choisit de ne pas utiliser la carte de Laney, Minitab affiche la carte traditionnelle et la carte de Laney dans le rapport de diagnostic. L'affichage des deux cartes permet à l'utilisateur de visualiser l'effet de la sous-dispersion ou de la surdispersion sur la carte P ou U et de déterminer si la carte de Laney est mieux adaptée à ces données.


De plus, lors du test de surdispersion ou de sous-dispersion, le rapport de l'Assistant affiche les indicateurs d'état suivants :

Etat	Condition
	<p>Taux de dispersion &gt; 130 %, moins de 2 % des points en dehors des limites de contrôle ou nombre de points en dehors des limites de contrôle = 1</p> <p>Taux de dispersion &gt; 75 % et ≤ 130 %</p> <p>Taux de dispersion &gt; 130 %, plus de 2 % des points en dehors des limites de contrôle et nombre de points en dehors des limites de contrôle &gt; 1, l'utilisateur choisit d'utiliser la carte de Laney P' ou U'</p> <p>Taux de dispersion &lt; 75 % et l'utilisateur choisit d'utiliser la carte de Laney P' ou U'</p> <p>où</p> <p>Taux de dispersion = <math>100 \times (\text{variation observée}) / (\text{variation attendue})</math></p>
	<p>Taux de dispersion &gt; 130 %, plus de 2 % des points en dehors des limites de contrôle et nombre de points en dehors des limites de contrôle &gt; 1, l'utilisateur n'a pas choisi d'utiliser la carte de Laney P' ou U'</p> <p>Taux de dispersion &lt; 75 % et l'utilisateur n'a pas choisi d'utiliser la carte de Laney P' ou U'</p>

## Quantité de données

Les rapports de l'Assistant pour les analyses de capabilité binomiale et de Poisson incluent également un intervalle de confiance à 95 % pour le pourcentage d'éléments défectueux ou le nombre de défauts par unité, respectivement. Cet intervalle est calculé à l'aide de la méthodologie statistique standard et ne requiert aucune recherche ou simulation spéciale.

Le rapport de l'Assistant affiche l'indicateur d'état suivant lors du contrôle de la quantité de données :

Etat	Condition
	<p><b>Capabilité binomiale</b></p> <p>L'intervalle de confiance à 95 % pour le pourcentage de défectueux est (a, b). Si cet intervalle est trop large pour votre application, vous pouvez collecter davantage de données pour en augmenter la précision.</p> <p><b>Capabilité de Poisson</b></p> <p>L'intervalle de confiance à 95 % pour le nombre de défauts par unité est (a, b). Si cet intervalle est trop large pour votre application, vous pouvez collecter davantage de données pour en augmenter la précision.</p>

## Cartes de Laney (P' et U')

Les cartes P et U traditionnelles supposent que la variation au sein des données suit la loi binomiale pour les données sur les défectueux, ou la loi de Poisson pour les données sur les défauts. Les cartes supposent également que votre taux de défectueux ou de défauts reste constant dans le temps. Minitab effectue un test pour déterminer si la variation au sein des données est supérieure ou inférieure à celle attendue, ce qui peut révéler une surdispersion ou une sous-dispersion. Reportez-vous à la section ci-dessus sur les vérifications des données concernant la variation attendue.

S'il existe une sous-dispersion ou une surdispersion des données, les cartes P et U traditionnelles peuvent ne pas fonctionner comme prévu. Une surdispersion peut générer des limites de contrôle trop étroites, entraînant un taux de fausse alarme élevé. Une sous-dispersion peut générer des limites de contrôle trop larges, avec lesquelles vous risquez de ne pas repérer une variation due à une cause spéciale, en la prenant pour une variation due à des causes communes.

### Objectif

Notre objectif était de développer une solution alternative aux cartes P et U traditionnelles lorsqu'une surdispersion ou une sous-dispersion est détectée dans les données.

### Méthode

Après consultation de la littérature spécialisée, nous sommes arrivés à la conclusion que la meilleure méthode pour pallier la surdispersion et la sous-dispersion était celle fournie par les cartes P' et U' de Laney (Laney, 2002). La méthode de Laney utilise une définition améliorée de la variation des causes communes, qui corrige les limites de contrôle trop étroites (surdispersion) ou trop larges (sous-dispersion).

Dans les cartes de Laney, la variation des causes communes inclut la variation à court terme habituelle à l'intérieur des sous-groupes, mais aussi la variation moyenne à court terme, entre des sous-groupes consécutifs. La variation des causes communes pour les cartes de Laney est calculée en normalisant les données et en utilisant l'étendue mobile moyenne des sous-groupes adjacents (aussi appelée Sigma Z sur les cartes de Laney) pour ajuster les limites de contrôle P ou U standard. La prise en compte de la variation entre les sous-groupes consécutifs permet de corriger les erreurs d'interprétation qui peuvent se produire lorsque la variation entre des sous-groupes est supérieure ou inférieure à celle attendue en raison de fluctuations dans le taux de défauts sous-jacent ou de données qui ne sont pas suffisamment aléatoires.

Une fois la valeur Sigma Z calculée, les données sont transformées de nouveau vers les unités d'origine. L'utilisation des données en unités initiales est avantageuse car si les effectifs des sous-groupes ne sont pas les mêmes, cela permet de faire varier les limites de contrôle, comme dans les cartes P et U traditionnelles. Pour plus de détails sur les cartes P' et U' de Laney, reportez-vous à l'Annexe E.

## Les résultats

Minitab vérifie s'il existe une surdispersion ou une sous-dispersion et, si c'est le cas, recommande une carte de Laney P' ou U'.

# Références

- AIAG (1995), *Statistical process control (SPC) reference manual*, Automotive Industry Action Group.
- Bischak, D.P. et Trietsch, D. (2007), The rate of false signals in  $\bar{X}$  control charts with estimated limits, *Journal of Quality Technology*, 39, 55–65.
- Bothe D.R. (1997), *Measuring process capability: Techniques and calculations for quality and manufacturing engineers*, New York : McGraw-Hill.
- Bowerman, B.L. et O' Connell, R.T. (1979), *Forecasting and time series: An applied approach*, Belmont, CA : Duxbury Press.
- Chan, L. K., Hapuarachchi K. P. et Macpherson, B.D. (1988), Robustness of  $\bar{X}$  and  $R$  charts, *IEEE Transactions on Reliability*, 37, 117–123.
- Davis, R.B. et Woodall W.H. (1988), Performance of the control chart trend rule under linear shift, *Journal of Quality Technology*, 20, 260–262.
- Laney, D. (2002), Improved Control Charts for Attributes, *Quality Engineering*, 14(4), 531-537.
- Montgomery, D.C. (2001), *Introduction to statistical quality control*, 4<sup>ème</sup> édition, New York : John Wiley & Sons, Inc.
- Schilling, E.G. et Nelson, P.R. (1976), The effect of non-normality on the control limits of  $\bar{X}$  charts, *Journal of Quality Technology*, 8, 183–188.
- Trietsch, D. (1999), *Statistical quality control : A loss minimization approach*, Singapore : World Scientific Publishing Co.
- Wheeler, D.J. (2004), *Advanced topics in statistical process control. The power of Shewhart's charts*, 2<sup>nde</sup> édition, Knoxville, TN : SPC Press.
- Yourstone, S.A. et Zimmer, W.J (1992), Non-normality and the design of control charts for averages, *Decision Sciences*, 23, 1099–1113.

# Annexe A : hypothèses complémentaires pour les cartes de contrôle aux attributs

Les cartes P et U nécessitent des hypothèses supplémentaires qui ne sont pas prises en compte par les vérifications des données :

Carte P	Carte U
<ul style="list-style-type: none"><li>• Les données sont composées de <math>n</math> éléments distincts, chaque élément étant classé comme défectueux ou non défectueux.</li><li>• La probabilité qu'un élément soit défectueux est la même pour chaque élément au sein d'un sous-groupe.</li><li>• La probabilité qu'un élément soit défectueux n'est pas influencée par le fait que l'élément précédent soit défectueux ou non.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Les dénombrements portent sur des événements discrets.</li><li>• Les événements discrets se produisent à l'intérieur d'une zone finie et bien définie de l'espace, du temps ou du produit.</li><li>• Les événements se produisent indépendamment les uns des autres et la probabilité d'un événement est proportionnelle à la taille du domaine d'opportunité.</li></ul>

Pour chaque carte, les deux premières hypothèses sont inhérentes au procédé de collecte de données, les données mêmes ne peuvent pas être utilisées pour vérifier si ces hypothèses sont satisfaites. La troisième hypothèse ne peut être vérifiée qu'avec une analyse détaillée et avancée des données, analyse que ne réalise pas l'Assistant.

# Annexe B : stabilité - tests des causes spéciales

## Simulation B1 : influence de l'ajout du test 2 au test 1 sur la sensibilité

Le test 1 détecte les points hors contrôle en signalant les points situés à plus de 3 écarts types de la ligne centrale. Le test 2 détecte des décalages dans la proportion d'éléments défectueux ou dans le nombre de défauts par unité en signalant les cas où 9 points consécutifs se trouvent du même côté de la ligne centrale.

Pour déterminer si l'utilisation du test 2 avec le test 1 augmente la sensibilité des cartes aux attributs, nous avons établi des limites de contrôle en nous fondant sur une loi normale ( $p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ ) ( $p$  est la proportion d'éléments défectueux et  $n$  est l'effectif de sous-groupe) pour la carte P et sur une loi normale ( $u, \sqrt{u}$ ) ( $u$  est le nombre moyen de défauts par unité) pour la carte U. Nous avons décalé l'emplacement ( $p$  ou  $u$ ) de chaque distribution par un multiple de l'écart type (EcTyp) et enregistré le nombre de sous-groupes nécessaires pour détecter un signal pour chacune des 10 000 itérations. Les résultats sont affichés dans le tableau 1.

Tableau 1 : Nombre moyen de sous-groupes jusqu'à l'échec du test 1 (Test 1), du test 2 (Test 2), ou du test 1 ou 2 (Test 1 ou 2). Le décalage est égal à un multiple de l'écart type (EcTyp).

Décalage	test 1	test 2	test 1 ou 2
0,5 EcTyp	154	84	57
1 EcTyp	44	24	17
1,5 EcTyp	15	13	9
2 EcTyp	6	10	5

Comme cela est indiqué dans le tableau, lorsque les deux tests sont utilisés (colonne Test 1 ou 2), 57 sous-groupes sont nécessaires en moyenne pour détecter un décalage de 0,5 écart type dans l'emplacement, contre 154 lorsque le test 1 est utilisé seul. Par conséquent, l'utilisation conjointe des deux tests augmente significativement la sensibilité à de petits décalages dans la proportion d'éléments défectueux ou le nombre moyen de défauts par unité. Cela dit, quand le décalage augmente, l'ajout du test 2 n'augmente pas la sensibilité de façon aussi significative.

# Annexe C : stabilité - effectif des sous-groupes

Le théorème central limite établit que la loi normale fournit une approximation par une loi de distribution de la moyenne d'une variable aléatoire, indépendante et distribuée de façon identique. Pour la carte P,  $\hat{p}$  (proportion du sous-groupe) est la moyenne d'une variable aléatoire, indépendante et distribuée de façon identique selon la loi de Bernoulli. Pour la carte U,  $\hat{u}$  (taux du sous-groupe) est la moyenne d'une variable aléatoire, indépendante, et distribuée de façon identique selon la loi de Poisson. Par conséquent, la loi normale peut être utilisée en tant qu'approximation dans les deux cas.

Plus l'effectif des sous-groupes augmente, plus l'approximation est exacte. L'approximation est également meilleure lorsque la proportion d'éléments défectueux (carte P) ou le nombre de défauts par unité (carte U) est plus élevé. Lorsque l'effectif des sous-groupes est faible ou que les valeurs de  $p$  (carte P) ou de  $u$  (carte U) sont petites, les lois de distribution de  $\hat{p}$  et  $\hat{u}$  présentent une asymétrie vers la droite, ce qui augmente le taux de fausse alarme. Par conséquent, nous pouvons évaluer l'exactitude de l'approximation par une loi normale en observant le taux de fausse alarme et déterminer l'effectif de sous-groupe minimal nécessaire à l'obtention d'une approximation par une loi normale adaptée.

Pour ce faire, nous avons réalisé des simulations visant à évaluer les taux de fausse alarme obtenus avec plusieurs effectifs de sous-groupes pour la carte P et la carte U ; nous avons ensuite comparé ces résultats au taux de fausse alarme attendu sous l'hypothèse normale (0,27 % pour le test 1 et 0,39 % pour le test 2).

## Simulation C1 : relation entre l'effectif de sous-groupe, la proportion et le taux de fausse alarme de la carte P

Nous avons établi les limites de contrôle pour plusieurs effectifs de sous-groupes ( $n$ ) et proportions ( $p$ ) à l'aide d'un ensemble initial de 10 000 sous-groupes. Nous avons également enregistré le pourcentage de fausses alarmes pour 2 500 sous-groupes supplémentaires. Nous avons ensuite réalisé 10 000 itérations et calculé le pourcentage moyen de fausses alarmes à partir du test 1 et du test 2, comme présenté dans le tableau 2.

Tableau 2 : % fausses alarmes dues au test 1, test 2 ( $np$ ) pour plusieurs effectifs de sous-groupe ( $n$ ) et proportions ( $p$ )

Effectif des sous-groupes ( $n$ )	$p$				
	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1
10	0,99, 87,37 (0,01)	4,89, 62,97 (0,05)	0,43, 40,14 (0,1)	1,15, 1,01 (0,5)	1,28, 0,42 (1)



Effectif des sous-groupes (n)	p				
	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1
50	4,88, 63,00 (0,05)	2,61, 10,41 (0,25)	1,38, 1,10 (0,5)	0,32, 0,49 (2,5)	0,32, 0,36 (5)
100	0,47, 40,33 (0,10)	1,41, 1,12 (0,5)	1,84, 0,49 (1)	0,43, 0,36 (5)	0,20, 0,36 (10)
150	1,01, 25,72 (0,15)	0,71, 0,43 (0,75)	0,42, 0,58 (1,5)	0,36, 0,42 (7,5)	0,20, 0,36 (15)
200	1,74, 16,43 (0,2)	1,86, 0,50 (1,00)	0,43, 0,41 (2)	0,27, 0,36 (10)	0,34, 0,36 (20)
500	1,43, 1,12 (0,5)	0,42, 0,50 (2,5)	0,52, 0,37 (5)	0,32, 0,37 (25)	0,23, 0,36 (50)

Les résultats du tableau 2 montrent que le pourcentage de fausses alarmes est généralement plus élevé lorsque la proportion (p) est faible, par exemple 0,001 ou 0,005, ou lorsque l'effectif d'échantillon est petit (n = 10). Par conséquent, le pourcentage de fausses alarmes est plus élevé lorsque la valeur du produit np est faible, et plus bas lorsque la valeur de np est élevée. Lorsque np est supérieur ou égal à 0,5, le taux de fausse alarme combiné pour les tests 1 et 2 est inférieur à une valeur approximative de 2,5 %. En revanche, pour des valeurs de np inférieures à 0,5, le taux de fausse alarme combiné pour les tests 1 et 2 peut être beaucoup plus élevé, atteignant des niveaux bien supérieurs à 10 %. Ainsi, en se fondant sur ce critère, les performances de la carte P sont adaptées lorsque la valeur de np est supérieure ou égale à 0,5. L'effectif du sous-groupe doit donc être d'au moins  $\frac{0,5}{\bar{p}}$ .

## Simulation C2 : relation entre l'effectif de sous-groupe, le nombre de défauts par unité et le taux de fausse alarme de la carte U

Nous avons établi les limites de contrôle pour plusieurs effectifs de sous-groupe (n) et nombres de défauts par sous-groupe (c) à l'aide d'un ensemble initial de 10 000 sous-groupes. Nous avons également enregistré le pourcentage de fausses alarmes pour 2 500 sous-groupes supplémentaires. Nous avons ensuite réalisé 10 000 itérations et calculé le pourcentage moyen de fausses alarmes à partir du test 1 et du test 2, tel qu'indiqué dans le tableau 3.

Tableau 3 : % fausses alarmes dues au test 1, test 2 pour plusieurs nombres de défauts par sous-groupe (c = nu)

c	0,1	0,3	0,5	0,7	1,0	3,0	5,0	10,0	30,0	50
% fausses alarmes	0,47, 40,40	3,70, 6,67	1,44, 1,13	0,57, 0,39	0,36, 0,51	0,38, 0,40	0,54, 0,38	0,35, 0,37	0,29, 0,37	0,25, 0,37

Les résultats du tableau 3 montrent que le pourcentage de fausses alarmes est plus élevé lorsque le produit de l'effectif de sous-groupe (n) et du nombre de défauts par unité (u), qui

est égal au nombre de défauts par sous-groupe ( $c$ ), est faible. Lorsque  $c$  est supérieur ou égal à 0,5, le taux de fausse alarme combiné pour les tests 1 et 2 est inférieur à une valeur approximative de 2,5 %. En revanche, pour des valeurs de  $c$  inférieures à 0,5, le taux de fausse alarme combiné pour les tests 1 et 2 peut être beaucoup plus élevé, atteignant des niveaux bien supérieurs à 10 %. Ainsi, en se fondant sur ce critère, les performances de la carte U sont adaptées lorsque la valeur  $c = nu$  est supérieure ou égale à 0,5. L'effectif du sous-groupe doit donc être d'au moins  $\frac{0,5}{u}$ .

# Annexe D : surdispersion/sous-dispersion

Soit  $d_i$  le nombre de défectueux du sous-groupe  $i$  et  $n_i$  l'effectif de sous-groupe.

Ils nous faut d'abord normaliser les nombres de défectueux. Pour rendre compte des éventuelles différences d'effectifs de sous-groupes, utilisez les nombres de défectueux ajustés ( $d_i$ -ajust) :

$d_i$ ajust = nombre ajusté de défectueux pour le sous-groupe  $i = \frac{d_i}{n_i}(\bar{n})$ , où

$\bar{n}$  = effectif de sous-groupe moyen

$$X_i = \sin^{-1} \sqrt{\frac{d_i \text{ajust} + 3/8}{\bar{n} + 0,75}}$$

L'écart type des nombres normalisés ( $X_i$ ) sera égal à  $\frac{1}{\sqrt{4 * \bar{n}}}$ . Cela signifie que la valeur de 2 écarts types est égale à  $\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$ .

Créez ensuite une droite de Henry standard en utilisant les nombres normalisés en tant que données. Une droite de régression est ajustée en utilisant uniquement les 50 % de points du diagramme se situant le plus au milieu. Trouvez les 25ème et 75ème percentiles des données sur les nombres transformés et utilisez toutes les paires X-Y supérieures ou égales au 25ème percentile et inférieures ou égales au 75ème percentile. Cette droite est utilisée pour obtenir les valeurs prévues des nombres transformés correspondant aux valeurs Z de -1 et +1. Les données "Y" de cette régression sont les valeurs normalisées des nombres transformés et les données "X" sont les nombres transformés.

Calculez la variation observée comme suit :

Soit  $Y(-1)$  la valeur transformée prévue pour  $Z = -1$

Soit  $Y(+1)$  la valeur transformée prévue pour  $Z = +1$

Estimation observée de 2 écarts types =  $Y(+1) - Y(-1)$ .

Calculez la variation attendue comme suit :

Estimation attendue de 2 écarts types =  $\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$

Calculez le rapport entre la variation observée et la variation attendue et convertissez-le en pourcentage. Si ce pourcentage est supérieur à 130 %, que plus de 2 % des points sont situés en dehors des limites de contrôle et que le nombre de points situés en dehors des

limites de contrôle est supérieur à 1, vous pouvez considérer qu'il y a surdispersion. Si le pourcentage est inférieur à 75 %, vous pouvez considérer qu'il y a sous-dispersion.

# Annexe E : cartes de Laney (P' et U')

Le principe des cartes P' et U' de Laney est de rendre compte des cas où la variation observée entre les sous-groupes ne correspond pas à la variation attendue lorsque les données des sous-groupes proviennent d'un procédé aléatoire présentant un taux constant de défectueux ou de défauts. Tous les procédés présentent normalement de petits changements dans leur taux de défauts ou de défectueux sous-jacent. Lorsque les effectifs de sous-groupe sont relativement faibles, la variation d'échantillonnage au sein des sous-groupes est assez grande pour que ces modifications ne soient pas visibles. Plus les effectifs de sous-groupe augmentent, plus cette variation d'échantillonnage diminue, et les petits changements du taux sous-jacent de défectueux ou de défauts deviennent suffisamment importants pour influencer sur les cartes P et U standard, accroissant le taux de fausse alarme. Dans certains exemples les taux de fausse alarme atteignaient 70 %. Cette condition est connue sous le nom de surdispersion.

Une méthode alternative a été développée pour remédier à ce problème et consiste à normaliser les valeurs p ou u des sous-groupes et à modéliser les données normalisées dans une carte I. La carte I utilise une étendue mobile des valeurs normalisées pour déterminer les limites de contrôle. Ainsi, la méthode utilisant la carte I modifie la définition de la variation des causes communes en y ajoutant la variation du taux de défectueux ou de défauts entre deux sous-groupes consécutifs.

La méthode de Laney transforme de nouveau les données vers les unités d'origine. L'avantage de cette méthode est que si les sous-groupes n'ont pas tous le même effectif, les limites de contrôle ne seront pas fixes, comme elles le sont avec la méthode de la carte I.

Les cartes P' et U' associent la nouvelle définition de la variation des causes communes et les limites de contrôle que l'on attendrait pour la variable avec différents effectifs de sous-groupes. Ainsi, l'hypothèse clé pour ces cartes tient à une modification de la définition de la variation de causes communes : elle inclue la variation habituelle à court terme au sein des sous-groupes, mais aussi la variation moyenne à court terme à laquelle on peut s'attendre entre des sous-groupes consécutifs.

## Carte P' de Laney

Soit

$X_i$  = nombre de défectueux dans le sous-groupe i

$n_i$  = effectif du sous-groupe i

$p_i$  = proportion de défectueux dans le sous-groupe i

$$\bar{p} = \frac{\sum X_i}{\sum n_i}$$

$$\sigma p_i = \sqrt{\frac{\bar{p} * (1 - \bar{p})}{n_i}}$$

Convertissez d'abord pi en valeurs de Z :

$$Z_i = \frac{p_i - \bar{p}}{\sigma p_i}$$

Une étendue mobile de longueur 2 est ensuite utilisée pour évaluer la variation dans les valeurs de Z et calculer Sigma Z ( $\sigma_z$ ).

$$\sigma_z = \frac{\overline{EM}}{1,128}$$

où 1,128 est une constante de correction de biais.

Remettez les données à l'échelle d'origine :

$$p_i = \bar{p} + \sigma p_i * \sigma_z$$

L'écart type de pi est donc :

$$sd(p_i) = \sigma p_i * \sigma_z$$

Les limites de contrôle et la ligne centrale sont calculées comme suit :

$$\text{Ligne centrale} = \bar{p}$$

$$\text{LCS} = \bar{p} + 3 * sd(p_i)$$

$$\text{LCI} = \bar{p} - 3 * sd(p_i)$$

## Carte U' de Laney

Soit

$X_i$  = nombre de défectueux dans le sous-groupe i

$n_i$  = effectif du sous-groupe i

$u_i$  = proportion de défectueux dans le sous-groupe i

$$\bar{u} = \frac{\sum X_i}{\sum n_i}$$

$$\sigma u_i = \sqrt{\frac{\bar{u} * (1 - \bar{u})}{n_i}}$$

Convertissez d'abord pi en valeurs de Z :

$$Z_i = \frac{u_i - \bar{u}}{\sigma u_i}$$

Une étendue mobile de longueur 2 est ensuite utilisée pour évaluer la variation dans les valeurs de Z et calculer Sigma Z ( $\sigma_Z$ ).

$$\sigma_Z = \frac{\overline{EM}}{1,128}$$

où 1,128 est une constante de correction de biais.

Remettez les données à l'échelle d'origine :

$$u_i = \bar{u} + \sigma u_i * \sigma_Z$$

L'écart type de pi est donc :

$$sd(u_i) = \sigma u_i * \sigma_Z$$

Les limites de contrôle et la ligne centrale sont calculées comme suit :

$$\text{Ligne centrale} = \bar{u}$$

$$\text{LCS} = \bar{u} + 3 * sd(u_i)$$

$$\text{LCI} = \bar{u} - 3 * sd(u_i)$$

© 2015, 2017 Minitab Inc. All rights reserved.

Minitab®, Quality. Analysis. Results.® and the Minitab® logo are all registered trademarks of Minitab, Inc., in the United States and other countries. See [minitab.com/legal/trademarks](http://minitab.com/legal/trademarks) for more information.