

# Gráficas de control de atributos

## Revisión general

Las gráficas de control se utilizan para monitorear regularmente un proceso para determinar si está bajo control. Cuando no es posible medir la calidad de un producto o servicio con datos continuos, suelen recolectarse datos de atributos para evaluar su calidad. El Asistente de Minitab incluye dos gráficas de control ampliamente utilizadas para monitorear un proceso con datos de atributos:

- Gráfica P: esta gráfica se utiliza cuando un producto o servicio se caracteriza por ser defectuoso o no defectuoso. La gráfica P representa la proporción de elementos defectuosos por subgrupo. Los datos recolectados son el número de elementos defectuosos en cada subgrupo, y se supone que siguen una distribución binomial con parámetro de proporción desconocido ( $p$ ).
- Gráfica U: esta gráfica se utiliza cuando un producto o servicio puede tener múltiples defectos y se cuenta el número de defectos. La gráfica U muestra el número de defectuosos por unidad. Los datos recolectados son el número total de defectos en cada subgrupo, y se supone que siguen una distribución de Poisson con un número medio desconocido de defectos por subgrupo.

Los límites de control de una gráfica de control normalmente se establecen en la fase de control de un proyecto Six Sigma. Una gráfica de control adecuada debe ser lo suficientemente sensible como para señalar rápidamente cuando existe una causa especial. Esa sensibilidad puede evaluarse calculando el número promedio de subgrupos necesarios para señalar una causa especial. Además, una gráfica de control adecuada raramente debería señalar una "falsa alarma" cuando el proceso está bajo control. La tasa de falsas alarmas puede evaluarse calculando el

porcentaje de subgrupos que se considera "fuera de control" cuando el proceso está bajo control.

Para ayudar a evaluar qué tan bien están funcionando las gráficas de control, la Tarjeta de informe del Asistente realiza automáticamente las siguientes verificaciones de los datos:

- Estabilidad
- Número de subgrupos
- Tamaño del subgrupo
- Variación esperada

En este trabajo, investigamos cómo se comporta una gráfica de control de atributos cuando varían esas condiciones y describimos cómo establecimos un conjunto de directrices para evaluar los requisitos de tales condiciones.

También explicamos las gráficas P' y U' de Laney que se recomiendan cuando la variación observada en los datos no coincide con la variación esperada y Minitab detecta dispersión excesiva o insuficiente.

Note La gráfica P y la gráfica U dependen de supuestos adicionales que no es posible verificar o que son difíciles de verificar. Para obtener más detalles, consulte el Apéndice A.

# Verificaciones de los datos

## Estabilidad

Para las gráficas de control de atributos, pueden realizarse cuatro pruebas para evaluar la estabilidad del proceso. Si estas pruebas se usan de manera simultánea, aumenta la sensibilidad de la gráfica de control. Sin embargo, es importante determinar el propósito y el valor agregado de cada prueba, porque la tasa de falsas alarmas aumenta a medida que se agregan más pruebas a la gráfica de control.

## Objetivo

Queríamos determinar cuál de las cuatro pruebas de estabilidad debían incluirse en el Asistente con las gráficas de control de atributos. Nuestro objetivo era identificar las pruebas que aumentan significativamente la sensibilidad a las condiciones fuera de control sin elevar significativamente la tasa de falsas alarmas, así como asegurar la simplicidad y el sentido práctico de las gráficas.

## Método

Las cuatro pruebas de estabilidad para las gráficas de atributos se corresponden con las pruebas de la 1 a la 4 para detectar causas especiales que se utilizan para las gráficas de control de variables. Con un tamaño de subgrupo adecuado, la proporción de elementos defectuosos (gráfica P) o el número de defectos por unidad (gráfica U) siguen una distribución normal. En consecuencia, las simulaciones para las gráficas de control de variables que también se basen en la distribución normal producirán resultados idénticos en lo que respecta a la sensibilidad y la tasa de falsas alarmas de las pruebas. Por lo tanto, usamos los resultados de una simulación y una revisión de la bibliografía sobre las gráficas de control de variables para evaluar qué efecto tienen las cuatro pruebas de estabilidad en la sensibilidad y la tasa de falsas alarmas de las gráficas de atributos. Además, evaluamos la prevalencia de causas especiales asociadas con la prueba. Para obtener detalles sobre los métodos utilizados para cada prueba, consulte la sección Resultados, a continuación, y el Apéndice B.

## Resultados

De las cuatro pruebas que se utilizan para evaluar la estabilidad en las gráficas de atributos, encontramos que las pruebas 1 y 2 son los más útiles:

### PRUEBA 1: IDENTIFICA LOS PUNTOS QUE ESTÁN FUERA DE LOS LÍMITES DEL CONTROL

La prueba 1 identifica los puntos  $> 3$  desviaciones estándar desde la línea central. La prueba 1 se reconoce universalmente como una prueba necesaria para detectar situaciones fuera de control. Tiene una tasa de falsas alarmas de tan solo 0.27%.

## PRUEBA 2: IDENTIFICA CAMBIOS EN LA PROPORCIÓN DE ELEMENTOS DEFECTUOSOS (GRÁFICA P) O EL NÚMERO MEDIO DE DEFECTOS POR UNIDAD (GRÁFICA U)

La prueba 2 señala cuando 9 puntos consecutivos se encuentran en el mismo lado de la línea central. Realizamos una simulación para determinar el número de subgrupos necesarios para detectar una señal con respecto a un cambio en la proporción de elementos defectuosos (gráfica P) o un cambio en el número medio de defectos por unidad (gráfica U). Descubrimos que cuando se agrega la prueba 2, aumenta significativamente la sensibilidad de la gráfica para detectar pequeños cambios en la proporción de elementos defectuosos o el número medio de defectos por unidad. Cuando se utilizan al mismo tiempo la prueba 1 y la prueba 2, se necesitan significativamente menos subgrupos para detectar un cambio pequeño que cuando se usa la prueba 1 solamente. Por lo tanto, cuando se agrega la prueba 2, pueden detectarse con más facilidad situaciones comunes fuera de control y la sensibilidad aumenta lo suficiente para justificar un ligero aumento en la tasa de falsas alarmas.

### Pruebas no incluidas en el Asistente



#### PRUEBA 3: K PUNTOS CONSECUTIVOS, EN ORDEN CRECIENTE O DECRECIENTE

La prueba 3 está diseñada para detectar cambios graduales en la proporción de elementos defectuosos o en el número medio de defectos por unidad (Davis y Woodall, 1988). Sin embargo, cuando la prueba 3 se utiliza además de la prueba 1 y la prueba 2, no aumenta significativamente la sensibilidad de la gráfica. Puesto que ya decidimos utilizar las pruebas 1 y 2, con base en los resultados de la simulación, incluir la prueba 3 no agregaría ningún valor significativo a la gráfica.

#### PRUEBA 4: K PUNTOS CONSECUTIVOS, ALTERNADOS HACIA ARRIBA Y HACIA ABAJO

Aunque este patrón puede ocurrir en la práctica, recomendamos buscar tendencias o patrones poco comunes en lugar de realizar una prueba para detectar un patrón específico.

Por lo tanto, el Asistente usa solamente la prueba 1 y la prueba 2 para verificar la estabilidad en las gráficas de control de atributos y muestra los siguientes indicadores de estado de la Tarjeta de informe:

Estado	Condición
	No hay fallas de la prueba 1 o la prueba 2 en la gráfica.
	Si no se cumple la condición anterior.

## Número de subgrupos

Si usted no tiene valores conocidos para los límites de control, éstos deben calcularse a partir de los datos. Para obtener estimaciones precisas de los límites, debe tener datos suficientes. Si la cantidad de datos es insuficiente, los límites de control pueden estar lejos de los límites “verdaderos” debido a la variabilidad del muestreo. Para mejorar la precisión de los límites, puede aumentar el número de subgrupos.

### Objetivo

Investigamos el número de subgrupos que se necesita para obtener límites de control precisos para la gráfica P y la gráfica U. Nuestro objetivo era determinar el número de subgrupos necesarios para asegurar que la tasa de falsas alarmas debido a la prueba 1 no sea más de 2% con 95% de confianza. No evaluamos el efecto del número de subgrupos sobre la línea central (prueba 2), porque las estimaciones de la línea central son más precisas que las estimaciones de los límites de control.

### Método

Cuando un tamaño de subgrupo adecuado y sin error debido a la variabilidad del muestreo, el porcentaje de puntos por encima del límite de control superior es 0.135%. Para determinar si el número de subgrupos es adecuado, seguimos el método descrito por Trietsch (1999) para asegurar que la tasa de falsas alarmas debido a puntos situados por encima del límite de control superior no sea más de 1% con un 95% de confianza. Debido a la simetría de los límites del control, este método da como resultado una tasa de falsas alarmas de 2% para la prueba 1. Para obtener más detalles, consulte el Apéndice C.

### Resultados

#### GRÁFICA P

Para asegurar que la tasa de falsas alarmas debido a prueba 1 no supere el 2%, el número de subgrupos ( $m$ ) necesarios para la gráfica P, con base en varios tamaños de subgrupo ( $n$ ) y proporciones ( $\bar{p}$ ), se muestra abajo.

Tamaño del subgrupo ( $n$ )	$\bar{p}$				
	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1
10	1881	421	228	60	35
50	425	109	64	23	16
100	232	65	41	17	13
150	165	49	32	14	11



	$\bar{p}$				
200	131	41	27	13	10
500	65	24	18	10	9

#### GRÁFICA U

Para asegurar que la tasa de falsas alarmas debido a prueba 1 no supere el 2%, el número de subgrupos (m) necesarios para la gráfica U para cada valor dado del número medio de defectos por subgrupo ( $\bar{c}$ ) se muestra abajo.

$\bar{c}$	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	3.0	5.0	10.0	30.0	50.0
Número de subgrupos	232	95	65	52	41	22	18	14	10	9

Con base en estos resultados, la Tarjeta de informe del Asistente muestra los siguientes indicadores de estado cuando se verifica el número de subgrupos en las gráficas de control de atributos:

Estado	Condición
	Número de subgrupos $\geq$ Número necesario. El número de subgrupos es lo suficientemente grande como para que, con un 95% de confianza, la tasa de falsas alarmas debido a prueba 1 no exceda de 2%.
	Si no se cumple la condición anterior.

## Tamaño del subgrupo

La distribución normal puede utilizarse para aproximar la distribución de la proporción de elementos defectuosos ( $\hat{p}$ ) en la gráfica P y la distribución del número de defectos por unidad ( $\hat{u}$ ) en la gráfica U. A medida que aumenta el tamaño del subgrupo, mejora la exactitud de esta aproximación. Puesto que los criterios de las pruebas utilizadas en cada gráfica de control se basan en la distribución normal, aumentar el tamaño del subgrupo para obtener una mejor aproximación a la normal mejora la capacidad de la gráfica para identificar con exactitud situaciones fuera de control y reduce la tasa de falsas alarmas. Cuando la proporción de elementos defectuosos o el número de defectos por unidad es bajo, se necesitan subgrupos grandes para asegurar resultados exactos.

## Objetivo

Minitab investigó el tamaño del subgrupo que se necesita para asegurar que la aproximación a la normal sea lo suficientemente adecuada como para obtener resultados exactos para la gráfica P y la gráfica U.

## Método



Realizamos simulaciones para evaluar las tasas de falsas alarmas para diferentes tamaños de subgrupo y diferentes proporciones ( $p$ ) en el caso de la gráfica P y diferentes números medios de defectos por subgrupo ( $c$ ) en el caso de la gráfica U. Para determinar si el tamaño del subgrupo era lo suficientemente grande como para obtener una aproximación adecuada a la normal y, por consiguiente, una tasa de falsas alarmas suficientemente baja, comparamos los resultados con tasa esperada de falsas alarmas bajo el supuesto de normalidad (0.27% para la prueba 1 y 0.39% para la prueba 2). Para obtener más detalles, consulte el Apéndice D.

## Resultados

### GRÁFICA P

Nuestra investigación reveló que el tamaño necesario del subgrupo para la gráfica P depende de la proporción de elementos defectuosos ( $p$ ). Mientras menor sea el valor de  $p$ , mayor será el tamaño del subgrupo ( $n$ ) que se necesitará. Cuando el producto  $np$  es mayor que o igual a 0.5, la tasa combinada de falsas alarmas para la prueba 1 y la prueba 2 está por debajo de aproximadamente 2.5%. Sin embargo, cuando el producto  $np$  es menor que 0.5, la tasa combinada de falsas alarmas para las pruebas 1 y 2 puede ser mucho mayor, llegando a niveles muy por encima de 10%. Por lo tanto, con base en este criterio, el rendimiento de la gráfica P es adecuado cuando el valor de  $np \geq 0.5$ .



Al verificar el tamaño del subgrupo para la gráfica P, la Tarjera de informe del Asistente muestra los siguientes indicadores de estado:

Estado	Condición
	$n_i \bar{p} \geq 0.5$ para todos los $i$ donde $n_i$ = tamaño del subgrupo para el subgrupo $i$ ésimo $\bar{p}$ = proporción media de elementos defectuosos
	Si no se cumple la condición anterior.

## GRÁFICA U

Nuestra investigación reveló que el tamaño necesario del subgrupo para la gráfica U depende del número de defectos por subgrupo ( $c$ ), que equivale al tamaño del subgrupo ( $n$ ) multiplicado por el número de defectos por unidad ( $u$ ). El porcentaje de falsas alarmas es mayor cuando el número de defectos  $c$  es pequeño. Cuando  $c = nu$  es mayor que o igual a 0.5, la tasa combinada de falsas alarmas para la prueba 1 y la prueba 2 es menos de aproximadamente 2.5%. Sin embargo, para valores de  $c$  menores que 0.5, la tasa combinada de falsas alarmas para las pruebas 1 y 2 puede ser mucho mayor, llegando a niveles muy por encima de 10%. Por lo tanto, con base en este criterio, el rendimiento de la gráfica U es adecuado cuando el valor de  $c = nu \geq 0.5$ .

Al verificar el tamaño del subgrupo para la gráfica U, la Tarjeta de informe del Asistente muestra los siguientes indicadores de estado:

Estado	Condición
	$n_i \bar{u} \geq 0.5$ para todos los $i$ donde $n_i$ = tamaño del subgrupo para el subgrupo $i$ ésimo $\bar{u}$ = número medio de defectos por unidad
	Si no se cumple la condición anterior.

## Variación esperada

Las gráficas P y las gráficas U tradicionales parten del supuesto de que la variación de los datos sigue la distribución binomial cuando se trata de elementos defectuosos o una distribución de Poisson cuando se trata de defectos. Las gráficas también presuponen que la tasa de elementos defectuosos o de defectos permanece constante en el tiempo. Cuando la variación en los datos es mayor o menor de lo esperado, es probable que los datos presenten dispersión excesiva o dispersión insuficiente y las gráficas podrían no funcionar como se espera.

### Dispersión excesiva

Se dice que existe dispersión excesiva cuando la variación en los datos es mayor de lo esperado. Por lo general, existe cierta variación en la tasa de elementos defectuosos o de defectos en el tiempo, causada por factores de ruido externos que no son causas especiales. En la mayoría de las aplicaciones de estas gráficas, la variación del muestreo con respecto a los estadísticos de subgrupos es lo suficientemente grande como para que la variación en la tasa subyacente de elementos defectuosos o de defectos no se note. Sin embargo, a medida que aumentan los tamaños de subgrupo, la variación del muestreo se reduce cada vez más y, en algún punto, la variación en la tasa subyacente de defectos puede llegar a ser mayor que la variación del



muestreo. El resultado es una gráfica con los límites de control extremadamente estrechos y una tasa muy alta de falsas alarmas.

### **Dispersión insuficiente**

Se dice que existe dispersión insuficiente cuando la variación en los datos es menor de lo esperado. La dispersión insuficiente puede ocurrir cuando los subgrupos adyacentes están correlacionados entre sí, lo que también se conoce como autocorrelación. Por ejemplo, a medida que una herramienta se desgasta, el número de defectos puede aumentar. El aumento en los conteos de defectos en los diferentes subgrupos puede hacer los subgrupos sean más similares de lo que serían en virtud de las probabilidades. Cuando los datos exhiben dispersión insuficiente, los límites del control de una gráfica P o U tradicional pueden ser demasiado amplios. Si los límites de control son demasiado amplios, la gráfica raramente proporcionará un señal, lo que significa que la variación por causa especial podría pasarse por alto y confundirse con variación por causa común.

Si la dispersión excesiva o la dispersión insuficiente es lo suficientemente grave, Minitab recomienda usar una gráfica P' o U' de Laney. Para obtener más información, consulte las gráficas P' y U' de Laney más adelante.

### **Objetivo**

Queríamos determinar un método para detectar dispersión excesiva y dispersión insuficiente en los datos.

### **Método**

Realizamos una búsqueda bibliográfica y encontramos varios métodos para detectar dispersión excesiva y dispersión insuficiente. Seleccionamos un método de diagnóstico que encontramos en Jones y Govindaraju (2001). Este método utiliza una gráfica de probabilidad para determinar la cantidad de variación esperada si los datos provienen de una distribución binomial cuando se trata de datos sobre elementos defectuosos o de una distribución de Poisson si se trata de datos sobre defectos. Posteriormente, se hace una comparación entre la cantidad de variación esperada y la cantidad de variación observada. Para obtener detalles sobre el método de diagnóstico, consulte el Apéndice E.

Como parte del proceso para verificar si existe dispersión excesiva, Minitab también determina cuántos puntos están fuera de los límites de control en las gráficas P y U tradicionales. Debido a que el problema asociado a la dispersión excesiva es una alta tasa de falsas alarmas, si solo un pequeño porcentaje de los puntos está fuera de control, es muy poco probable que la dispersión excesiva constituya un problema.

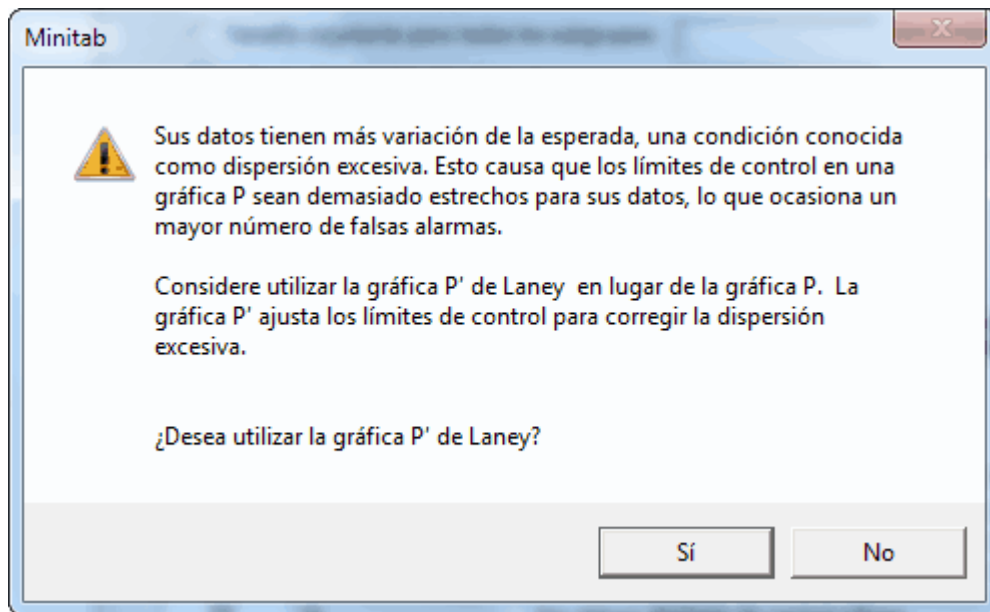
### **Resultados**

Minitab realiza la verificación de diagnóstico con respecto a la dispersión excesiva y la dispersión insuficiente después de que el usuario selecciona Aceptar en el cuadro de diálogo de la gráfica P o U antes de que aparezca la gráfica.

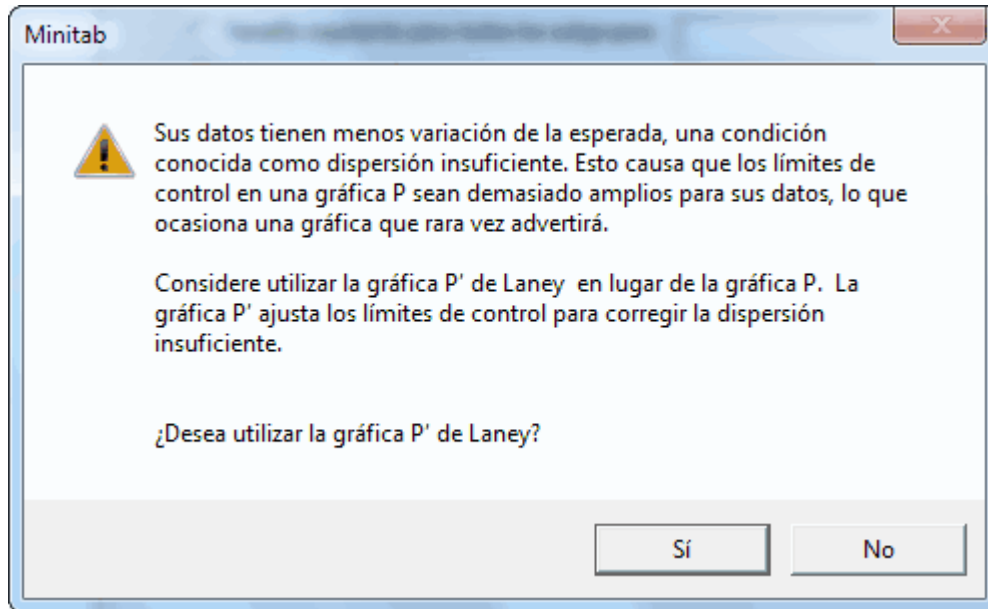
Existe dispersión excesiva cuando se cumplen las siguientes condiciones:

- La relación de variación observada a variación esperada es mayor que 130%.
- Más del 2% de los puntos se ubica fuera de los límites de control.
- El número de puntos fuera de los límites de control es mayor que 1.

Si se detecta dispersión excesiva, Minitab muestra un mensaje que pregunta si el usuario desea mostrar una gráfica P' o U' de Laney. A continuación se muestra el mensaje para la gráfica P':





Existe dispersión insuficiente cuando la relación de variación observada a variación esperada es menor que 75%. Si se detecta dispersión insuficiente, Minitab muestra un mensaje que pregunta si el usuario desea mostrar una gráfica P' o U' de Laney. A continuación se muestra el mensaje para la gráfica P':



Si el usuario decide usar la gráfica de Laney, Minitab muestra la gráfica de Laney en el informe de resumen. Si el usuario decide no usar la gráfica de Laney, Minitab muestra la gráfica P o U tradicional en el informe de resumen. Sin embargo, tanto la gráfica tradicional como la gráfica de Laney se muestran en el informe de diagnóstico. Cuando se muestran ambas gráficas, el usuario puede ver el efecto de la dispersión excesiva o de la dispersión insuficiente en la gráfica P o U tradicional y determinar si la gráfica de Laney es más apropiada para sus datos.

Además, al verificar si existe dispersión excesiva o dispersión insuficiente, la Tarjeta de informe del Asistente muestra los siguientes indicadores de estado:

Estado	Condición
	<p>Relación de dispersión &gt; 130%, menos del 2% de los puntos fuera de los límites de control o número de puntos fuera de los límites de control = 1</p> <p>Relación de dispersión &gt; 75% y &lt;= 130%</p> <p>Relación de dispersión &gt; 130%, más del 2% de los puntos fuera de los límites de control y número de puntos fuera de los límites de control &gt; 1 y usuario optó por usar P' o U' de Laney</p> <p>Relación de dispersión &lt; 75% y usuario optó por usar P' o U' Laney</p> <p>Donde</p> <p>Relación de dispersión = <math>100 \times (\text{variación observada}) / (\text{variación esperada})</math></p>

Estado	Condición
	Relación de dispersión > 130%, más del 2% de los puntos fuera de los límites de control y número de puntos fuera de los límites de control > 1 y usuario optó por no usar P' o U' de Laney Relación de dispersión < 75% y usuario optó por no usar P' o U' Laney

# Gráficas P' y U' de Laney

Las gráficas P y las gráficas U tradicionales parten del supuesto de que la variación de los datos sigue la distribución binomial en el caso de los datos sobre elementos defectuosos o una distribución de Poisson en el caso de los datos sobre defectos. Las gráficas también presuponen que la tasa de elementos defectuosos o de defectos permanece constante en el tiempo. Minitab realiza una verificación para determinar si la variación en los datos es mayor o menor de lo esperado, una indicación de que los datos podrían presentar dispersión excesiva o dispersión insuficiente. Consulte la verificación de la Variación esperada en los datos, arriba.

Si hay dispersión excesiva o dispersión insuficiente en los datos, las gráficas P y U tradicionales podrían no funcionar como se espera. La dispersión excesiva puede hacer que los límites del control sean demasiado estrechos, lo que produce una alta tasa de falsas alarmas. La dispersión insuficiente puede hacer que los límites del control sean demasiado amplios, lo que puede ocasionar que se pase por alto la variación por causa especial y se confunda con variación por causa común.

## Objetivo

Nuestro objetivo era identificar una alternativa a las gráficas P y U tradicionales cuando se detecta dispersión excesiva o dispersión insuficiente en los datos.

## Método

Revisamos la bibliografía y determinamos que el mejor enfoque para tratar la dispersión excesiva y la dispersión insuficiente son las gráficas P' y U' de Laney (Laney, 2002). El método de Laney utiliza una definición revisada de la variación por causa común, que corrige los límites del control que son demasiado estrechos (dispersión excesiva) o demasiado amplios (dispersión insuficiente).

En las gráficas de Laney, la variación por causa común incluye la habitual variación a corto plazo dentro del subgrupo, pero también incluye la variación promedio a corto plazo entre subgrupos consecutivos. La variación por causa común para las gráficas de Laney se calcula normalizando los datos y usando el rango móvil promedio de los subgrupos adyacentes (denominado Sigma Z en las gráfica de Laney) para ajustar los límites de control de la gráfica P o U estándar. Incluir la variación entre subgrupos consecutivos ayuda a corregir el efecto cuando la variación de los datos en los diferentes subgrupos es mayor o menor de lo esperado debido a fluctuaciones en la tasa subyacente de defectos o a una falta de aleatoriedad en los datos.

Después de que se calcula Sigma Z, los datos se transforman de nuevo a las unidades originales. El uso de las unidades originales de los datos es beneficioso porque si los subgrupos no son del mismo tamaño, los límites de control podrán variar tal como lo hacen en las gráficas P y U

tradicionales. Para obtener más información sobre las gráficas P' y U' de Laney, consulte el Apéndice F.

## Resultados

Minitab verifica si existe dispersión excesiva o dispersión insuficiente y si se detecta cualquiera de estas condiciones, Minitab recomienda usar una gráfica P' o U' de Laney.

# Referencias

- AIAG (1995). Statistical Process Control (SPC) reference manual. Automotive Industry Action Group.
- Bischak, D.P. y Trietsch, D. (2007). The rate of false signals in  $\bar{X}$  control charts with estimated limits. *Journal of Quality Technology*, 39, 55–65.
- Bowerman, B.L. y O'Connell, R.T. (1979). *Forecasting and time series: An applied approach*. Belmont, CA: Duxbury Press.
- Chan, L. K., Hapuarachchi K. P. y Macpherson, B.D. (1988). Robustness of  $\bar{X}$  and R charts. *IEEE Transactions on Reliability*, 37, 117–123.
- Davis, R.B. y Woodall, W.H. (1988). Performance of the control chart trend rule under linear shift. *Journal of Quality Technology*, 20, 260–262.
- Jones, G. y Govindaraju, K. (2001). A Graphical Method for Checking Attribute Control Chart Assumptions, *Quality Engineering*, 13(1), 19-26.
- Laney, D. (2002). Improved Control Charts for Attributes. *Quality Engineering*, 14(4), 531-537.
- Montgomery, D.C. (2001). *Introduction to statistical quality control*, 4<sup>th</sup> edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Schilling, E.G. y Nelson, P.R. (1976). The effect of non-normality on the control limits of  $\bar{X}$  charts. *Journal of Quality Technology*, 8, 183–188.
- Trietsch, D. (1999). *Statistical quality control: A loss minimization approach*. Singapore: World Scientific Publishing Co.
- Wheeler, D.J. (2004). *Advanced topics in statistical process control. The power of Shewhart's charts*, 2<sup>nd</sup> edition. Knoxville, TN: SPC Press.
- Yourstone, S.A. y Zimmer, W.J. (1992). Non-normality and the design of control charts for averages. *Decision Sciences*, 23, 1099–1113.

# Apéndice A: Supuestos adicionales para las gráficas de control de atributos

La gráfica P y la gráfica U requieren supuestos adicionales que no son evaluados por las verificaciones de datos:

Gráfica P	Gráfica U
<ul style="list-style-type: none"><li>• Los datos se compone de <math>n</math> elementos distintos, con cada elemento clasificado como defectuoso o no defectuoso.</li><li>• La probabilidad de que un elemento esté defectuoso es igual para cada elemento dentro de un subgrupo.</li><li>• La probabilidad de que un elemento esté defectuoso no se ve afectada por el hecho de que el elemento inmediatamente anterior esté defectuoso o no.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Los conteos son recuentos de eventos discretos.</li><li>• Los eventos discretos ocurren dentro de cierta región finita bien definida de espacio, tiempo o producto.</li><li>• Los eventos ocurren de manera independiente entre sí y la probabilidad de un evento es proporcional al tamaño del área de oportunidad.</li></ul>

Para cada gráfica, los dos primeros supuestos son parte inherente del proceso de recolección de datos; los datos por sí mismos no pueden usarse para verificar si se cumplen estos supuestos. El tercer supuesto solo puede verificarse con un análisis detallado y avanzado de los datos, que no se realiza en el Asistente.



# Apéndice B: Estabilidad

## Simulación B1: Qué efecto tiene en la sensibilidad la adición de la prueba 2 a la prueba 1

La prueba 1 detecta puntos fuera de control señalando cuando un punto está a más de 3 desviaciones estándar de la línea central. La prueba 2 detecta cambios en la proporción de elementos defectuosos o del número de defectos por unidad señalando cuando 9 puntos consecutivos se ubican en el mismo lado de la línea central.

Para evaluar si el uso de la prueba 2 junto con la prueba 1 mejora la sensibilidad de las gráficas de atributos, establecimos los límites de control con base en una distribución normal ( $p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ ) ( $p$  es la proporción de elementos defectuosos y  $n$  es el tamaño del subgrupo) para la gráfica P y en una distribución normal ( $u, \sqrt{u}$ ) ( $u$  es el número medio de defectos por unidad) para la gráfica U. Cambiamos la ubicación ( $p$  o  $u$ ) de cada distribución por un múltiplo de la desviación estándar (DE) y luego registramos el número de subgrupos necesarios para detectar una señal para cada una de las 10,000 iteraciones. Los resultados se muestran en la tabla 1.

Tabla 1 Número promedio de subgrupos hasta una falla de la prueba 1 (prueba 1), una falla de la prueba 2 (prueba 2) o una falla de la prueba 1 o la prueba 2 (prueba 1 ó 2). El cambio es igual a un múltiplo de la desviación estándar (DE).

Cambio	Prueba 1	Prueba 2	Prueba 1 ó 2
0.5 DE	154	84	57
1 DE	44	24	17
1.5 DE	15	13	9
2 DE	6	10	5

Como se muestra en la tabla, cuando se usan ambas pruebas (columna Prueba 1 ó 2), se necesita un promedio de 57 subgrupos para detectar un cambio de 0.5 desviaciones estándar en la ubicación, en comparación con el promedio de 154 subgrupos necesarios para detectar un cambio de 0.5 desviaciones estándar cuando se usa la prueba 1 solamente. Por lo tanto, cuando se usan ambas pruebas, aumenta significativamente la sensibilidad para detectar pequeños cambios en la proporción de elementos defectuosos o el número medio de defectos por unidad. Sin embargo, a medida que aumenta el tamaño del cambio, la adición de la prueba 2 no aumenta la sensibilidad de una manera tan significativa.

# Apéndice C: Número de subgrupos

## Fórmula C1: Número de subgrupos necesarios para la gráfica P con base en un IC de 95% para el límite de control superior

Para determinar si hay suficientes subgrupos para asegurar que la tasa de falsas alarmas se mantenga razonablemente baja, seguimos a Bischak (1999) y determinamos el número de subgrupos que asegurará que la tasa de falsas alarmas debido a la prueba 1 no sea mayor que 2% con un 95% de confianza.

En primer lugar, hallamos  $p_c$  de manera que

$$p_c + 3 \sqrt{\frac{p_c(1-p_c)}{n}} = \bar{p} + z_{0.99} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

donde

$p_c$  = proporción que produce una tasa de falsas alarmas de 1% por encima del límite de control superior, partiendo del supuesto de que  $\bar{p}$  es el verdadero valor de  $p$ . Debido a la simetría de los límites de control, la tasa total de falsas alarmas total pasa a 2% cuando se consideran los límites de control superior e inferior.

$n$  = tamaño del subgrupo (si el tamaño del subgrupo varía, se utiliza el tamaño promedio del subgrupo)

$\bar{p}$  = proporción promedio de elementos defectuosos

$z_p$  = cdf inversa evaluada en  $p$  para la distribución normal con media=0 y desviación estándar=1

Para determinar el número de subgrupos, calculamos un límite de confianza inferior de 95% para el límite de control superior y lo establecemos en  $p_c$ ,

$$p_c = \bar{p} - z_{0.95} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{nm}}$$

y resolvemos  $m$ , lo que nos da el siguiente resultado:

$$m = \frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n \left(\frac{\bar{p}-p_c}{z_{0.95}}\right)^2}$$

Usando esta fórmula, podemos determinar el número de subgrupos necesarios para asegurar que la tasa de falsas alarmas por encima del límite de control superior permanezca por debajo de 1% con un 95% de confianza para diferentes proporciones y tamaños del subgrupo, como se

muestra en la tabla 2. Debido a la simetría de los límites del control, este es el mismo número de subgrupos que se necesita para asegurar que la tasa total de falsas alarmas debido a la prueba 1 para la gráfica P siga siendo inferior a 2% con un 95% de confianza.

**Tabla 2** Número de subgrupos (m) para diferentes tamaños de subgrupo (n) y proporciones ( $\bar{p}$ )

Tamaño del subgrupo (n)	$\bar{p}$				
	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1
10	1881	421	228	60	35
50	425	109	64	23	16
100	232	65	41	17	13
150	165	49	32	14	11
200	131	41	27	13	10
500	65	24	18	10	9

**Nota** Para las gráficas de control de variables, limitamos a 1% la tasa total de falsas alarmas debido a la prueba 1. Para las gráficas de atributos, flexibilizamos el criterio a 2% por razones prácticas. En muchos casos, la proporción de elementos defectuosos en la gráfica P es pequeña, haciendo que se requiera un gran número de subgrupos para lograr precisión, como se muestra en la tabla 2.

## Fórmula C2: Número de subgrupos necesarios para la gráfica P con base en un IC de 95% para el límite de control superior

Utilizamos el mismo método descrito para la gráfica de P, arriba. Siguiendo a Trietsch (1999), determinamos el número de subgrupos que asegurará que la tasa total de falsas alarmas debido a prueba 1 no sea superior a 2% con un 95% de confianza.

En primer lugar, hallamos un  $c_c$  de manera que

$$c_c + 3\sqrt{c_c} = \bar{c} + z_{0.99}\sqrt{\bar{c}}$$

donde

$c_c$  = número medio de defectos por subgrupo que produce una tasa de falsas alarmas de 1% por encima del límite de control superior, partiendo del supuesto de que  $\bar{c}$  es el verdadero valor de c. debido a la simetría de los límites del control, la tasa total de falsas alarmas debido a la prueba 1 pasa a 2% cuando se combinan los límites superior e inferior.

$\bar{c}$  = número promedio de defectos por subgrupo (si el tamaño del subgrupo varía, se utiliza el tamaño promedio del subgrupo)

$z_p$  = cdf inversa evaluada en p para la distribución normal con media=0 y desviación estándar=1

Para determinar el número de subgrupos, calculamos un límite de confianza inferior de 95% para el límite de control superior y lo establecemos en  $c_c$ ,

$$c_c = \bar{c} - z_{0.95} \sqrt{\frac{\bar{c}}{m}}$$

y resolvemos m, lo que nos da el siguiente resultado:

$$m = \frac{\bar{c}}{\left(\frac{\bar{c} - c_c}{z_{0.95}}\right)^2}$$

Algunos resultados basados en los cálculos anteriores se muestran en la tabla 3.

**Tabla 3** Número de subgrupos (m) para diferentes valores para el número medio de defectos por subgrupo ( $\bar{c}$ )

$\bar{c}$	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	3.0	5.0	10.0	30.0	50.0
Número de subgrupos	232	95	65	52	41	22	18	14	10	9

**Note** Para las gráficas de control de variables, limitamos a 1% la tasa de falsas alarmas debido a la prueba 1. Para las gráficas de atributos, flexibilizamos el criterio a 2% por razones prácticas. En muchos casos, el número de defectos por subgrupo es pequeño, haciendo que se requiera un gran número de subgrupos para lograr precisión, como se muestra en la tabla 3.

# Apéndice D: Tamaño del subgrupo

El teorema del límite central establece que la distribución normal puede aproximarse a la distribución del promedio de una variable aleatoria independiente distribuida de manera idéntica. Para la gráfica P,  $\hat{p}$  (proporción de subgrupos) es el promedio de una variable aleatoria de Bernoulli independiente y distribuida de manera idéntica. Para la gráfica U,  $\hat{u}$  (tasa de subgrupos) es el promedio de una variable aleatoria de Poisson independiente y distribuida de manera idéntica. Por lo tanto, la distribución normal puede utilizarse como una aproximación en ambos casos.

La exactitud de la aproximación mejora a medida que aumenta el tamaño del subgrupo. La aproximación también mejora con una mayor proporción de elementos defectuosos (gráfica P) o un mayor número de defectos por unidad (gráfica U). Cuando el tamaño del subgrupo es pequeño o los valores de  $p$  (gráfica P) o de  $u$  (gráfica U) son pequeños, las distribuciones de  $\hat{p}$  y  $\hat{u}$  son asimétricas hacia la derecha, con lo cual aumenta la tasa de falsas alarmas. Por lo tanto, podemos evaluar la exactitud de la aproximación a la normal observando la tasa de falsas alarmas, y también podemos determinar el tamaño mínimo del subgrupo necesario para obtener una aproximación adecuada a la normal.

Para ello, realizamos simulaciones para evaluar las tasas de falsas alarmas con diferentes tamaños de subgrupo para la gráfica P y la gráfica U y comparamos los resultados con la tasa esperada de falsas alarmas bajo el supuesto de normalidad (0.27% para la prueba 1 y 0.39% para la prueba 2).

## Simulación D1: Relación entre el tamaño del subgrupo, la proporción y la tasa de falsas alarmas de la gráfica P

Usando un conjunto inicial de 10,000 subgrupos, establecimos los límites de control para diferentes tamaños de subgrupo ( $n$ ) y proporciones ( $p$ ). También registramos el porcentaje de falsas alarmas para 2,500 subgrupos adicionales. Luego realizamos 10,000 iteraciones y calculamos el porcentaje promedio de falsas alarmas de la prueba 1 y la prueba 2, como se muestra en la tabla 4.

**Tabla 4** % de falsas alarmas debido a la prueba 1 y la prueba 2 (np) para diferentes tamaños de subgrupo (n) y proporciones (p)

Tamaño del subgrupo (n)	p				
	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1
10	0.99, 87.37 (0.01)	4.89, 62.97 (0.05)	0.43, 40.14 (0.1)	1.15, 1.01 (0.5)	1.28, 0.42 (1)
50	4.88, 63.00 (0.05)	2.61, 10.41 (0.25)	1.38, 1.10 (0.5)	0.32, 0.49 (2.5)	0.32, 0.36 (5)
100	0.47, 40.33 (0.10)	1.41, 1.12 (0.5)	1.84, 0.49 (1)	0.43, 0.36 (5)	0.20, 0.36 (10)
150	1.01, 25.72 (0.15)	0.71, 0.43 (0.75)	0.42, 0.58 (1.5)	0.36, 0.42 (7.5)	0.20, 0.36 (15)
200	1.74, 16.43 (0.2)	1.86, 0.50 (1.00)	0.43, 0.41 (2)	0.27, 0.36 (10)	0.34, 0.36 (20)
500	1.43, 1.12 (0.5)	0.42, 0.50 (2.5)	0.52, 0.37 (5)	0.32, 0.37 (25)	0.23, 0.36 (50)

Los resultados de la tabla 4 muestran que el porcentaje de falsas alarmas por lo general alcanza su nivel más alto cuando la proporción (p) es pequeña, como 0.001 ó 0.005, o cuando el tamaño de la muestra es pequeño (n = 10). Por lo tanto, el porcentaje de falsas alarmas alcanza su mayor nivel cuando el valor del producto np es pequeño y su menor nivel cuando np es grande. Cuando np es mayor que o igual a 0.5, la tasa combinada de falsas alarmas para la prueba 1 y la prueba 2 está por debajo de aproximadamente 2.5%. Sin embargo, para valores de np menores que 0.5, la tasa combinada de falsas alarmas para las pruebas 1 y 2 es mucho mayor, llegando a niveles muy por encima de 10%. Por lo tanto, con base en este criterio, el rendimiento de la gráfica P es adecuado cuando el valor de  $np \geq 0.5$ . Entonces, el tamaño del subgrupo debería ser por lo menos  $\frac{0.5}{p}$ .

## Simulación D2: Relación entre el tamaño del subgrupo, el número de defectos por unidad y la tasa de falsas alarmas de la gráfica U

Usando un conjunto inicial de 10,000 subgrupos, establecimos los límites de control para diferentes tamaños de subgrupo (n) y números de defectos por subgrupo (p). También registramos el porcentaje de falsas alarmas para 2,500 subgrupos adicionales. Luego realizamos 10,000 iteraciones y calculamos el porcentaje promedio de falsas alarmas de la prueba 1 y la prueba 2, como se muestra en la tabla 5.

**Tabla 5** % de falsas alarmas debido a la prueba 1 y la prueba 2 para diferentes números de defectos por subgrupo ( $c = nu$ )

c	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	3.0	5.0	10.0	30.0	50
% de falsas alarmas	0.47, 40.40	3.70, 6.67	1.44, 1.13	0.57, 0.39	0.36, 0.51	0.38, 0.40	0.54, 0.38	0.35, 0.37	0.29, 0.37	0.25, 0.37

Los resultados de la tabla 5 muestran que el porcentaje de falsas alarmas alcanza su mayor nivel cuando el producto del tamaño del subgrupo ( $n$ ) por el número de defectos por unidad ( $u$ ), que equivale al número de defectos por subgrupo ( $c$ ), es pequeño. Cuando  $c$  es mayor que o igual a 0.5, la tasa combinada de falsas alarmas para la prueba 1 y la prueba 2 está por debajo de aproximadamente 2.5%. Sin embargo, para valores de  $c$  menores que 0.5, la tasa combinada de falsas alarmas para las pruebas 1 y 2 es mucho mayor, llegando a niveles muy por encima de 10%. Por lo tanto, con base en este criterio, el rendimiento de la gráfica U es adecuado cuando el valor de  $c = nu \geq 0.5$ . Entonces, el tamaño del subgrupo debería ser por lo menos  $\frac{0.5}{\bar{u}}$ .

# Apéndice E: Dispersión excesiva/Dispersión insuficiente

Supongamos que  $d_i$  es el conteo de defectuosos del subgrupo  $i$  y que  $n_i$  es el tamaño del subgrupo.

En primer lugar, normalice los conteos de defectuosos. Para representar los tamaños posiblemente diferentes de los subgrupos, use conteos ajustados de defectuosos ( $d_{i\text{ajust}}$ ):

$$d_{i\text{ajust}} = \text{conteo ajustado de defectuosos para el subgrupo } i = \frac{d_i}{n_i}(\bar{n}), \text{ donde}$$

$\bar{n}$  = tamaño promedio de los subgrupos

$$X_i = \sin^{-1} \sqrt{\frac{d_{i\text{ajust}} + 3/8}{\bar{n} + 0.75}}$$

Los conteos normalizados ( $X_i$ ) tendrán una desv.est. igual a  $\frac{1}{\sqrt{4 * \bar{n}}}$ . Esto significa que 2 desviaciones estándar es igual a  $\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$ .

Luego, genere una gráfica de probabilidad normal estándar usando los conteos normalizados como datos. Una línea de regresión se ajusta usando solamente el 50% central de los puntos de la gráfica. Encuentre los percentiles 25 y 75 de los datos de conteos transformados y use todos los pares  $X-Y \geq$  percentil 25 y  $\leq$  percentil 75. Esta línea se utiliza para obtener los valores pronosticados de los conteos transformados correspondientes a los valores de  $Z$  de  $-1$  y  $+1$ . Los datos de "Y" en esta regresión son las puntuaciones normales de los conteos transformados y los datos de "X" son los conteos transformados.

Calcule la variación observada de la siguiente manera:

Supongamos que  $Y(-1)$  es el conteo transformado pronosticado para  $Z = -1$

Supongamos que  $Y(+1)$  es el conteo transformado pronosticado para  $Z = +1$

Estimación observada de 2 desviaciones estándar =  $Y(+1) - Y(-1)$ .

Calcule la variación esperada de la siguiente manera:

$$\text{Estimación esperada de 2 desviaciones estándar} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$$

Calcule la relación de variación observada a variación esperada y conviértala en un porcentaje. Si el porcentaje es  $> 130\%$ , más del 2% de los puntos está fuera de los límites de control y el número de puntos fuera de los límites de control  $> 1$ , existe evidencia de dispersión excesiva. Si el porcentaje es  $< 75\%$ , hay evidencia de dispersión insuficiente.



# Apéndice F: Gráficas P' y U' de Laney

La idea detrás de las gráficas P' y U' de Laney es corregir aquellos casos en los que la variación observada entre los subgrupos no coincida con la variación esperada si los datos de los subgrupos provinieran de un proceso aleatorio con una tasa constante de defectos o elementos defectuosos. Normalmente en todo proceso ocurren pequeños cambios en la tasa subyacente de defectos o de elementos defectuosos. Cuando los tamaños de subgrupo son relativamente pequeños, la variación del muestreo en los subgrupos es lo suficientemente grande como para que estos pequeños cambios no se noten. A medida que aumentan los tamaños de los subgrupos, la variación del muestreo disminuye y los pequeños cambios en la tasa subyacente de defectos o de elementos defectuosos llegan a ser lo suficientemente grandes como para afectar negativamente a las gráficas P y U estándar con un aumento en la tasa de falsas alarmas. Algunos ejemplos han mostrado tasas de falsas alarmas de hasta 70%. Esta condición se conoce como dispersión excesiva.

Para resolver este problema, se desarrolló un método alternativo que normaliza los valores de p o de u del subgrupo y presenta los datos normalizados en una gráfica I. La gráfica I utiliza un rango móvil de los valores normalizados para determinar sus límites de control. Por lo tanto, el método de la gráfica I cambia la definición de variación por causa común al agregar la variación en la tasa de elementos defectuosos o de defectos de un subgrupo con respecto al siguiente.

El método de Laney transforma los datos de nuevo a las unidades originales. La ventaja de esto es que si todos los subgrupos no son del mismo tamaño, los límites de control no serán fijos, como sucede con el método de la gráfica I.

Las gráficas P' y U' combinan la nueva definición de variación por causa común con los límites de control variables que se esperarían al tener subgrupos de diferentes tamaños. Por lo tanto, el supuesto clave para estas gráficas es que la definición de variación por causa común se modificó para incluir la variación habitual a corto plazo que está presente dentro de los subgrupos más la variación promedio a corto plazo que se esperaría observar entre los subgrupos consecutivos.

## Gráfica P' de Laney

Supongamos que

$X_i$  = número de defectuosos en el subgrupo i

$n_i$  = tamaño del subgrupo para el subgrupo i

$p_i$  = proporción de defectuosos para el subgrupo i

$$\bar{p} = \frac{\sum X_i}{\sum n_i}$$

$$\sigma p_i = \sqrt{\frac{\bar{p} * (1 - \bar{p})}{n_i}}$$

En primer lugar, convierta la  $p_i$  en puntuaciones z:

$$Z_i = \frac{p_i - \bar{p}}{\sigma p_i}$$

Luego, se utiliza un rango móvil de longitud 2 para evaluar la variación en las puntuaciones z y se calcula Sigma Z ( $\sigma_z$ ).

$$\sigma_z = \frac{\overline{MR}}{1.128}$$

donde 1.128 es una constante de eliminación de sesgo.

Transforme los datos de nuevo a la escala original:

$$p_i = \bar{p} + \sigma p_i * \sigma_z$$

Así, la desviación estándar de  $p_i$  es:

$$sd(p_i) = \sigma p_i * \sigma_z$$

Los límites de control y la línea central se calculan como:

$$\text{Línea central} = \bar{p}$$

$$\text{LCS} = \bar{p} + 3 * sd(p_i)$$

$$\text{LCI} = \bar{p} - 3 * sd(p_i)$$

## Gráfica U' de Laney

Supongamos que

$X_i$  = número de defectuosos en el subgrupo i

$n_i$  = tamaño del subgrupo para el subgrupo i

$u_i$  = proporción de defectuosos para el subgrupo i

$$\bar{u} = \frac{\sum X_i}{\sum n_i}$$

$$\sigma u_i = \sqrt{\frac{\bar{u} * (1 - \bar{u})}{n_i}}$$

En primer lugar, convierta la  $p_i$  en puntuaciones  $z$ :

$$Z_i = \frac{u_i - \bar{u}}{\sigma u_i}$$

Luego, se utiliza un rango móvil de longitud 2 para evaluar la variación en las puntuaciones  $z$  y se calcula Sigma  $Z$  ( $\sigma_z$ ).

$$\sigma_z = \frac{\overline{MR}}{1.128}$$

donde 1.128 es una constante de eliminación de sesgo.

Transforme los datos de nuevo a la escala original:

$$u_i = \bar{u} + \sigma u_i * \sigma_z$$

Así, la desviación estándar de  $p_i$  es:

$$sd(u_i) = \sigma u_i * \sigma_z$$

Los límites de control y la línea central se calculan como:

$$\text{Línea central} = \bar{u}$$

$$\text{LCS} = \bar{u} + 3 * sd(u_i)$$

$$\text{LCI} = \bar{u} - 3 * sd(u_i)$$

© 2015, 2017 Minitab Inc. All rights reserved.

Minitab®, Quality. Analysis. Results.® and the Minitab® logo are all registered trademarks of Minitab, Inc., in the United States and other countries. See [minitab.com/legal/trademarks](http://minitab.com/legal/trademarks) for more information.