

二项能力和 Poisson 能力

概述

能力分析可用于评估过程是否能够产生符合客户要求的输出。在无法利用连续数据表示产品或服务的质量时，通常收集属性数据来评估其质量。Minitab 协助包含两个可利用属性数据检查过程能力的分析：

- 二项能力：在产品或服务的特性确定为有缺陷或无缺陷时，使用此分析。二项分析可评估从某个过程选定的项目出现缺陷的概率 (p)。收集的数据是各个子组中的不良品数（假定这些数据遵循具有参数 p 的二项分布）。
- Poisson 能力：在产品或服务具有多个缺陷并且对每个项目中的缺陷数进行了计数时，使用此分析。Poisson 能力可评估单位缺陷数。收集的数据是各个子组中包含的 k 单位中的缺陷总数（假定这些数据遵循单位缺陷数 (u) 均值未知的 Poisson 分布）。

为准确评估当前过程的能力并可靠地预测将来此过程的能力，这些分析的数据应该来自一个稳定过程 (Bothe, 1991; Kotz 和 Johnson, 2002)。此外，应该在某个时间段内收集足够的子组，以确保能力估计值可表示一段较长时间内的过程能力。即使某个过程是受控的，它也可能在一定的时间内出现输入和环境变化。因此，使用足够数量的子组可以更好地让您捕获到一段时间内的不同变异源 (Bothe, 1997; AIAG, 1995)。最后，应该有足够的数据来确保能力统计量达到较高的精确度（由这两个分析报告的关键能力度量的置信区间的宽度所表示）。

根据这些要求，“协助报告卡”会自动对您的数据执行以下检查：

- 过程稳定性
 - 特殊原因检验
 - 子组大小
- 子组数
- 预期变异
- 数据量

在此白皮书中，我们调查了这些要求如何与实际中的能力分析相关，我们介绍了我们如何在“协助”中确定用于检查这些要求的指导原则。

我们还解释了在数据中观测到的变异与预期的变异不匹配，并且 Minitab 检测到过度离散或欠离散时建议的 Laney P' 和 U' 控制图。

注 二项和 Poisson 能力分析分别包括 P 和 U 属性控制图，用于检查过程稳定性。这两个控制图依赖于一些附加的假设，而这些假设常常无法检查或难以检查。有关详细信息，请参见附录 A。

数据检查

稳定性（部分 I） - 特殊原因检验

为准确评估过程能力，您的数据应该来自稳定过程。您应该在评估过程的能力之前验证过程的稳定性。如果过程不稳定，则应该确定和消除不稳定的原因。

P 控制图和 U 控制图是最广泛使用的属性控制图，用于评估过程的稳定性。P 控制图可绘制每个子组的不良品率图，它是在数据遵循二项分布时使用。U 控制图可以绘制单位缺陷数图，它在数据遵循 Poisson 分布时使用。可以对这些控制图执行四个检验，以评估此过程的稳定性。使用这些检验可同时提高控制图的敏感度。但必须确定每个检验的目的和对敏感度的增值，因为随着添加到控制图中的检验越来越多会使误报率提高。

目标

我们想要确定，在“协助”内包含于属性控制图中的四个检验中，哪个检验是可以用于检查稳定性的。我们的第一个目标是确定可显著提高对失控条件的敏感度但不会显著提高误报率的检验。我们的第二个目标是确保这些控制图的简单性和可行性。

方法

针对控制图特殊原因的四个稳定性检验用于属性与变量控制图的检验 1-4 一一对应。如果子组大小足够，不良品率（P 控制图）或单位缺陷数（U 控制图）将近似遵循正态分布。结论是，这些检验的敏感度和误判率在属性控制图与基于正态分布的变量控制图所进行的模拟结果是完全相同的。因此，在针对属性控制图审核评估这些检验如何影响控制图的敏感度和误判率时，我们可以使用针对变量控制图进行的模拟结果和文献来进行。此外，我们评估了与此检验关联的特殊原因的普遍性。有关用于每个检验的方法的详细信息，请参见下面的“结果”部分和附录 B。

结果

在用于评估属性控制图中的稳定性的四个检验中，我们发现，检验 1 和 2 最有用：

检验 1：找出落入控制限制外的点

检验 1 找到那些距离中心线中大于 3 个标准差的数据点。检验 1 通常被认为是检测失控情况的必要检验。它只有 0.27% 的误报率。

检验 2：找出不良品率（P 控制图）或单位缺陷数均值（U 控制图）中的偏移

检验 2 是一旦出现连续 9 个点位于中心线的同一侧时发出信号。我们执行了一个模拟以确定检测到不良品率（P 控制图）中的偏移信号或单位缺陷数均值（U 控制图）中的偏移信号所需的子组数。我们发现，添加检验 2 可以显著提高控制图的敏感度，以检测不良品率或单位缺陷数均值中的小偏移。在检验 1 和检验 2 结合使用时，与单独使用检验 1 相比，只需要显著地减少了子组数就能检测到小偏移。因此，添加检验 2 有助于检测常见失控情况，在只略微提高误报率的条件下就能提高足够的敏感度。

“协助”中不包含的检验

检验 3：连续 K 个点，全部递增或全部递减。

检验 3 旨在检测不良品率或单位缺陷数中的漂移 (Davis 和 Woodall, 1988)。但是，在检验 3 与检验 1 和检验 2 结合使用时，它不会显著提高控制图的敏感度。由于我们已决定根据我们的模拟结果使用检验 1 和检验 2，包含检验 3 并不能为此控制图增加任何明显价值。

检验 4：连续 K 个点，上下交错。

虽然此模式可能会出现在实际统计中，但我们建议您寻找任何可能的异常趋势或模式，而不是为一种特定模式寻找检验。

稳定性（部分 II）- 子组大小

虽然 P 控制图和 U 控制图可通过属性数据监视过程的稳定性，但正态分布可用于对 P 控制图中的不良品率 (\hat{p}) 的分布和 U 控制图中的单位缺陷数 \hat{u} 的分布进行近似计算。随着子组大小的增大，此近似的准确度也会提高。由于每个控制图中使用的检验的条件基于正态分布，因此，增大子组大小以获得更好的正态近似可以提高控制图准确找出失控情况的能力，并降低误报率。在不良品率或单位缺陷数比较低时，您需要更大的子组来确保获得准确的结果。

目标

我们对所需的子组大小进行了调查，以确保正态近似足以获取 P 控制图和 U 控制图的准确结果。

方法

我们执行了相关模拟，以针对 P 控制图的各种子组大小和各种比率 (p) 以及针对 U 控制图的各种子组缺陷数均值 (c) 评估误报率。要确定子组大小是否足够大可获得充足的正态近似，因而获得足够低的误报率，我们按正态假设将这些结果与预期的误报率（对于检验 1，为 0.27%；对于检验 2，为 0.39%）进行了比较。有关详细信息，请参见附录 C。

结果

P 控制图


我们的研究表明，P 控制图所必需的子组大小取决于不良品率 (p)。 p 值越小，所需的子组大小 (n) 越大。在 np 的乘积大于或等于 0.5 时，检验 1 和检验 2 的组合误报率略低于 2.5%。但是，在 np 的乘积小于 0.5 时，检验 1 和检验 2 的组合误报率会高得多，达到超过 10% 的水平。因此，根据这种条件，在 np 大于等于 0.5 时，P 控制图的性能足够。

U 控制图




我们的研究表明，U 控制图所必需的子组大小取决于子组缺陷数，子组缺陷数等于子组大小 (n) 乘以单位缺陷数 (u)。在缺陷数 c 比较小时，误报百分比最高。在 $c = nu$ 大于或等于 0.5 时，检验 1 和检验 2 的组合误报率略低于 2.5%。但是，在 c 值小于 0.5 时，检验 1 和检验 2 的组合误报率会高得多，达到超过 10% 的水平。因此，根据这种条件，在 c 值 = nu 大于等于 0.5 时，U 控制图的性能足够。

根据上述关于特殊原因（部分 I）和子组大小（部分 II）的检验的结果，当检查用于二项和 Poisson 能力的属性控制图中的稳定性时，“协助报告卡”会显示以下状态指标：

P 控制图 - 二项能力

状态	条件
	控制图上没有检验 1 或检验 2 失效 并且 $an_i \bar{p} \geq 0.5$ 适用于所有 i 其中 n_i = 第 i 个子组的子组大小 \bar{p} = 不良品率均值
	检验 1 或检验 2 找到一个或多个由于特殊原因而失控的点。
	子组可能太小。 $an_i \bar{p} < 0.5$ 适用于至少一个 i

U 控制图 - Poisson 能力

状态	条件
	控制图上没有检验 1 或检验 2 失效 并且 $an_i \bar{u} \geq 0.5$ 适用于所有 i 其中 n_i = 第 i 个子组的子组大小 \bar{u} = 单位缺陷数均值
	检验 1 或检验 2 找到一个或多个由于特殊原因而失控的点。
	子组大小可能太小。 $an_i \bar{u} < 0.5$ 适用于至少一个 i

子组数

为确保此能力估计值可以准确反映整个过程，您应该尝试在某个时间段内捕获过程中所有可能的变异源。如果增大所收集的子组数，则可能会提高捕获到不同变异源的机会。收集足够的子组数也有助于提高用于评估过程稳定性的控制图限制的精确度。但是，收集更多子组需要花费更多时间和资源；因此，必须了解子组数对能力估计值可靠性的影响程度。

目标

我们对需要多少子组即可充分表示此过程并提供可靠的过程能力估计值进行了调查。


方法

我们查阅了文献资料，找到通常足以估计过程能力的子组数。

结果

根据统计过程控制（SPC）手册，您收集的子组数应该基于收集可能反映过程中不同变异源的数据所需的时间（AIAG，1995）。即，您应该收集的子组数与足以能表示整个过程所必须子组数一样多。通常，为了提供准确的稳定性检验和可靠的过程性能估计值，AIAG（1995）建议您至少要收集 25 个子组。

根据这些建议，“协助报告卡”将在检查二项或 Poisson 能力分析的子组数时，显示以下状态指标：

状态	条件
	<p>子组数大于等于 25</p> <p>在一个足够长的时间段内收集子组时，子组数应该足够大以便捕获不同的过程变异源。</p> <p>子组数小于 25</p> <p>通常，应该至少在一个足够长的时间段内收集 25 个子组，这样才能捕获不同的过程变异源。</p>

预期变异

在评估其能力之前，用于评估过程稳定性的数据假设是：传统 P 控制图假设不良品数遵循二项分布；U 控制图假设缺陷数遵循 Poisson 分布。这些控制图还假设，不良品率或缺陷率在一段时间内保持恒定。当数据中的变异大于或小于预期值时，显示您的数据可能过度离散或欠离散，这时控制图不会按预期运行。

过度离散

当数据中的变异超过预期时，存在过度离散。通常，存在于某段时间内的不良品率或缺陷率中的某些变异是由非特殊原因的外部噪声因子导致的。在这些控制图的大多数应用中，相应的不良品率或缺陷率并不明显，但子组统计量的抽样变异足够大。但是，随着子组大小的增大，抽样变异变得越来越小，并且，在某些点处，相应的缺陷率中的变异可能大于抽样变异。结果得到一个具有极窄的控制限和非常高的误报率的控制图。

欠离散

当数据中的变异低于预期时，存在欠离散。欠离散可能会在相邻子组彼此相关（也称作自相关）时出现。例如，随着工具的磨损，缺陷数可能增大。子组中的缺陷计数的增大会使这些相依子组抽样更加类似于随机抽样的情况。在数据呈现欠离散时，传统 P 控制图或 U 控制图上的控制限可能太宽。如果控制限太宽，控制图将几乎不发出信号，这意味着，您可能会忽略特殊原因变异，将其误认为是普遍原因导致的变异。

如果过度离散或欠离散非常严重，则 Minitab 建议使用 Laney P' 或 U' 控制图。有关详细信息，请参见下面的 Laney P' 和 U' 控制图。

目标

我们想要确定用于检测数据中过度离散和欠离散的方法。

方法

我们进行了文献研究，找到几种用于检测过度离散和欠离散的方法。我们选择了在 Jones 和 Govindaraju (2001) 中找到的诊断方法。如果数据源自不良品数据的二项分布或缺陷数据的 Poisson 分布时，此方法使用概率图来确定预期变异量。然后，比较预期变异量和观测到的变异量。有关诊断方法的详细信息，请参见附录 D。

在进行过度离散检查的过程中，Minitab 还确定了应该有多少点落入传统 P 和 U 控制图的控制限之外。由于过度离散的问题会带来高误报率，因此，只有较低百分比的数据点失控时，才不会出现过度离散为问题。

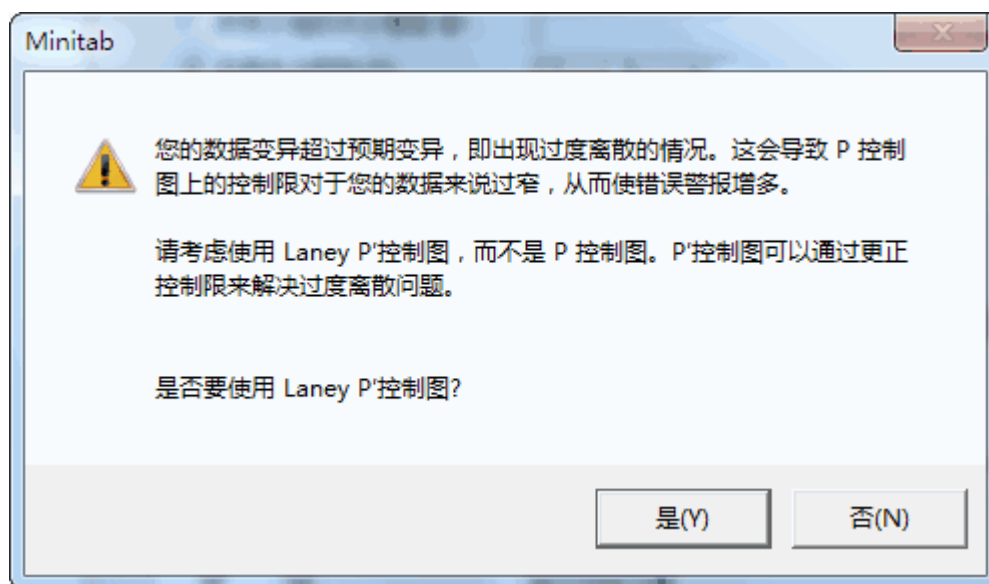
结果

在显示 P 或 U 控制图之前，用户在选择这些控制图的对话框中的“确定”之后，Minitab 将执行过度离散和欠离散诊断检查。

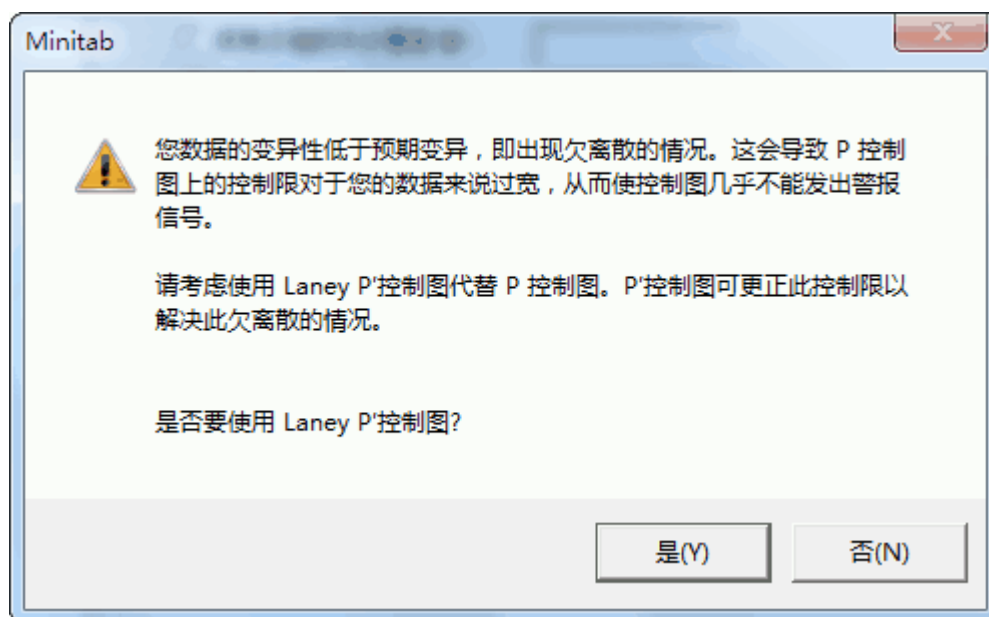
在满足以下这些条件时，存在过度离散：

- 观测到的变异与预期变异的比值大于 130%。
- 超过 2% 的数据点位于控制限之外。
- 位于控制限之外的数据点数大于 1。

如果检测到过度离散，Minitab 会显示询问您用户是否想要显示 Laney P' 或 U' 控制图的消息。下面显示的是 P' 控制图的消息：



在观测到的变异与预期变异的比值小于 75% 时，就存在欠离散。如果检测到欠离散，Minitab 会显示询问用户是否要显示 Laney P' 或 U' 控制图的消息。下面显示的是 P' 控制图的消息：



如果用户选择使用 Laney 控制图，则 Minitab 会在诊断报告中显示 Laney 控制图。如果用户选择不使用 Laney 控制图，则 Minitab 会在诊断报告中显示传统控制图和 Laney 控制图。如果显示这两个控制图，则用户可以查看过度离散或欠离散对传统 P 或 U 控制图的影响，并确定 Laney 控制图是否更适合于其数据。


此外，当检查过度离散或欠离散时，“协助报告卡”会显示以下状态指标：

状态	条件
	离散率大于 130%，不到 2% 的数据点位于控制限之外，或者位于控制限之外的数据点数为 1 离散率大于 75% 且小于等于 130% 离散率大于 130%，超过 2% 的数据点位于控制限之外，并且位于控制限之外的数据点数为超过 1 个，用户选择使用 Laney P' 或 U' 离散率小于 75%，并且用户选择使用 Laney P' 或 U' 其中 离散率等于 $100 * (\text{观测到的变异}) / (\text{预期变异})$
	离散率大于 130%，超过 2% 的数据点位于控制限之外，并且位于控制限之外的数据点数为超过 1 个，用户没有选择使用 Laney P' 或 U' 离散率小于 75%，并且用户没有选择使用 Laney P' 或 U'

数据量

二项和 Poisson 能力分析的“协助”报告也分别包括不良品百分比或单位缺陷数的 95% 置信区间。此区间是使用标准差方法计算的，不要求任何特别研究或模拟。

当检查数据量时，“协助报告卡”显示以下状态指标：

状态	条件
	<p>二项能力</p> <p>不良品率的 95% 置信区间为 (a, b)。如果对于您的应用而言，这些区间太宽，则可以收集更多数据来提高精确度。</p> <p>Poisson 能力</p> <p>单位缺陷数的 95% 置信区间为 (a, b)。如果对于您的应用而言，此区间范围太宽，则您可以通过收集更多的数据来提高此区间的精度。</p>

Laney P' 和 U' 控制图

传统 P 控制图假设数据中的不良品数遵循二项分布，U 控制图假设数据中缺陷数遵循 Poisson 分布。这些控制图还假设不良品率或缺陷率在一段时间内保持恒定。Minitab 将执行一个检查，以确定数据中的变异是大于还是小于预期变异，这是数据过度离散或欠离散的指示。请参见上面的预期变异数据检查。

如果数据中出现过度离散或欠离散，则传统的 P 和 U 控制图不会按预期运行。过度离散会导致控制限太窄，导致较高的误报率。欠离散会导致控制限太宽，导致忽略特殊原因变异，并将其误认为是普遍原因导致的变异。

目标

我们的目标是在数据中检测到过度离散或欠离散时找出传统 P 和 U 控制图的备择控制图。

方法

我们查阅了文献资料，确定了用于处理过度离散或欠离散的最佳方法是 Laney P' 和 U' 控制图 (Laney, 2002)。Laney 方法使用普遍原因导致的变异的修订定义，它可校正太窄（过度离散）或太宽（欠离散）的控制限。

在 Laney 控制图中，普遍原因导致的变异包括子组变异中的常见短期变异，还包括连续子组之间的平均短期变异。Laney 控制图的普遍原因导致的变异是通过使数据正态化来计算的，并且，使用相邻子组的平均移动极差（在 Laney 控制图上称作 Sigma Z）可调整标准 P 或 U 控制限。在由于相关缺陷率出现波动或数据缺乏随机性，子组中的数据变异大于或小于预期值时，包含连续子组之间的变异有助于校正此效应。

在计算 Sigma Z 后，数据将变换回原始单位。使用原始数据单位比较有益，原因是，如果子组大小不同，则在控制限于传统 P 和 U 控制图中时，允许控制限各不相同。有关 Laney P' 和 U' 控制图的详细信息，请参见附录 E。

结果

Minitab 将执行过度离散或欠离散检查，如果检测到过度离散或欠离散情况，Minitab 会建议使用 Laney P' 或 U' 控制图。

参考书

- AIAG (1995). *Statistical process control (SPC) reference manual*. Automotive Industry Action Group.
- Bischak, D.P., & Trietsch, D. (2007). The rate of false signals in \bar{X} control charts with estimated limits. *Journal of Quality Technology*, 39, 55 - 65.
- Bothe, D.R. (1997). *Measuring process capability: Techniques and calculations for quality and manufacturing engineers*. New York: McGraw-Hill.
- Bowerman, B.L., & O'Connell, R.T. (1979). *Forecasting and time series: An applied approach*. Belmont, CA: Duxbury Press.
- Chan, L. K., Hapuarachchi K. P., & Macpherson, B.D. (1988). Robustness of \bar{X} and R charts. *IEEE Transactions on Reliability*, 37, 117 - 123.
- Davis, R.B., & Woodall, W.H. (1988). Performance of the control chart trend rule under linear shift. *Journal of Quality Technology*, 20, 260 - 262.
- Laney, D. (2002). Improved Control Charts for Attributes. *Quality Engineering*, 14(4), 531-537.
- Montgomery, D.C. (2001). *Introduction to statistical quality control*, 4th edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Schilling, E.G., & Nelson, P.R. (1976). The effect of non-normality on the control limits of \bar{X} charts. *Journal of Quality Technology*, 8, 183 - 188.
- Trietsch, D. (1999). *Statistical quality control: A loss minimization approach*. Singapore: World Scientific Publishing Co.
- Wheeler, D.J. (2004). *Advanced topics in statistical process control. The power of Shewhart's charts*, 2nd edition. Knoxville, TN: SPC Press. (2004).
- Yourstone, S.A., & Zimmer, W.J. (1992). Non-normality and the design of control charts for averages. *Decision Sciences*, 23, 1099 - 1113.

附录 A：属性控制图的其他假设

P 控制图和 U 控制图还需要些附加假设，这些假设并不能由数据来检查评估：

P 控制图	U 控制图
<ul style="list-style-type: none">• 数据由 n 个可区分项组成，每个项都分类为不良品或良品。• 每个子组内不良品项的概率都相同。• 各项是否成为不良品的可能性不受前面项是否为不良品的影响。	<ul style="list-style-type: none">• 计数为离散事件的计数。• 离散事件出现在一些已定义的有限个空间、时间或产品的区域内。• 事件是相互独立出现的，其出现的可能性（概率）与其所含机会区域的大小成比例。

对于每个控制图，前两个假设是数据收集过程的固有部分；数据本身无法用于检查是否满足这些假设。第三个假设只能通过数据的更细致和高级统计分析进行验证，这不是由“协助”执行的。

附录 B：稳定性 – 特殊原因检验

模拟 B1：将检验 2 添加到检验 1 会对敏感度产生什么影响

检验 1 当数据与中心线距离超过 3 个标准差时发出信号来检测失控点。检验 2 是一旦出现连续 9 个点位于中心线的同一侧时发出不良品比率或单位缺陷数偏移的信号。

为评估结合使用检验 2 和检验 1 是否可提高属性控制图的敏感度，我们根据 P 控制图的正态 $(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$ (p 是不良品比率， n 是子组大小) 分布以及 U 控制图的正态 (u, \sqrt{u}) (u 是单位缺陷数均值) 分布确定了控制限。我们按标准差 (SD) 倍数偏移了每个分布的位置 (p 或 u)，然后进行 10,000 次迭代，记录各次迭代检测到信号所需的子组数量。结果如表 1 中所示。

表 1 直到检验 1 失效 (检验 1)、检验 2 失效 (检验 2) 或检验 1 或检验 2 失效 (检验 1 或 2) 的平均子组数。偏移等于标准差 (SD) 的倍数。

偏移	检验 1	检验 2	检验 1 或 2
0.5 SD	154	84	57
1 SD	44	24	17
1.5 SD	15	13	9
2 SD	6	10	5

如表中所示，在使用这两个检验 (检验 1 或 2 列) 时，只需要平均 57 个子组就能检测到此位置中的 0.5 个标准差偏移 (与单独使用检验 1 时检测到 0.5 个标准差偏移所需的 154 个子组平均值相比而言)。因此，使用这两个检验可显著提高检测到不良品比率或单位缺陷数均值中的小偏移的敏感度。但是，随着偏移大小的增大，添加检验 2 并不会显著提高敏感度。

附录 C：稳定性 - 子组大小

中心极限定理指出，当随机变量是独立且同分布时，其平均值的分布近似于正态分布。对于 P 控制图， \hat{p} （子组比率）是独立且相同分布的 Bernoulli 随机变量的平均值。对于 U 控制图， \hat{u} （子组率）是独立且相同分布的 Poisson 随机变量的平均值。因此，正态分布可以作为这两种情况的近似分布。

近似准确度会随着子组大小的增大而提高。当不良品比率（P 控制图）或单位缺陷数（U 控制图）较高时，其近似程度也会改进。在子组大小比较小或者 p （P 控制图）值或 u （U 控制图）值比较小时， \hat{p} 和 \hat{u} 的分布向右偏斜，这会提高误报率。因此，我们可以通过查看误报率来评估正态近似的准确度，我们还可以确定正态获得足够近似所必需的最小子组大小。

为此，我们执行了相关模拟，以评估 P 控制图和 U 控制图的不同子组大小的误报率，并在正态假设条件下将结果与预期误报率（对于检验 1，为 0.27%，对于检验 2，为 0.39%）进行比较。

模拟 C1：P 控制图的子组大小、比率和误报率之间的关系

我们使用原始的 10,000 个子组的集合来确定各种子组大小（ n ）和比率（ p ）的控制限，然后记录了后增的 2,500 个子组的误报百分比。然后，我们执行了 10,000 次迭代，并计算了检验 1 和检验 2 中误报平均百分比，如表 2 中所示。

表 2 对于检验 1，检验 2 (np)，不同子组大小 (n) 和比率 (p) 的误报百分比

子组大小 (n)	p				
	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1
10	0.99, 87.37 (0.01)	4.89, 62.97 (0.05)	0.43, 40.14 (0.1)	1.15, 1.01 (0.5)	1.28, 0.42 (1)
50	4.88, 63.00 (0.05)	2.61, 10.41 (0.25)	1.38, 1.10 (0.5)	0.32, 0.49 (2.5)	0.32, 0.36 (5)
100	0.47, 40.33 (0.10)	1.41, 1.12 (0.5)	1.84, 0.49 (1)	0.43, 0.36 (5)	0.20, 0.36 (10)
150	1.01, 25.72 (0.15)	0.71, 0.43 (0.75)	0.42, 0.58 (1.5)	0.36, 0.42 (7.5)	0.20, 0.36 (15)
200	1.74, 16.43 (0.2)	1.86, 0.50 (1.00)	0.43, 0.41 (2)	0.27, 0.36 (10)	0.34, 0.36 (20)
500	1.43, 1.12 (0.5)	0.42, 0.50 (2.5)	0.52, 0.37 (5)	0.32, 0.37 (25)	0.23, 0.36 (50)

表 2 中的结果显示，在比率 (p) 比较小，如 0.001 或 0.005 时，或样本数量比较小 ($n = 10$) 时，误报百分比通常最高。因此，在 np 的乘积比较小时，误报百分比最高，在 np 的乘

积比较大时，误报百分比最低。当 np 的乘积大于或等于 0.5 时，检验 1 和检验 2 的合并误报率将低到大约 2.5%。但是，对于 np 的乘积值小于 0.5，检验 1 和检验 2 的合并误报率将高得多，达到超过 10% 的水平。因此，根据此准则，在 np 的乘积值大于或等于 0.5 时，P 控制图的性能足够。因此，子组大小应该至少为 $\frac{0.5}{\bar{p}}$ 。

模拟 C2: U 控制图的子组大小、单位缺陷数和误报率之间的关系

我们使用原始的 10,000 个子组的集合确定了各种子组大小 (n) 和子组缺陷数 (c) 的控制限，然后记录了后增的 2,500 个子组的误报百分比。然后，我们执行了 10,000 次迭代，并计算了检验 1 和检验 2 中误报平均百分比，如表 3 中所示。

表 3 对于检验 1 和检验 2，每个子组中各个缺陷数 ($c = nu$) 的误报百分比

c	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	3.0	5.0	10.0	30.0	50
误报百分比	0.47, 40.40	3.70, 6.67	1.44, 1.13	0.57, 0.39	0.36, 0.51	0.38, 0.40	0.54, 0.38	0.35, 0.37	0.29, 0.37	0.25, 0.37

表 3 中的结果显示，在子组大小 (n) 乘以单位缺陷数 (u) 的乘积 (等于子组缺陷数 (c)) 比较小时，误报百分比最高。在 c 大于或等于 0.5 时，检验 1 和检验 2 的合并误报率将低到大约 2.5%。但是，对于 c 值小于 0.5，检验 1 和检验 2 的合并误报率将高得多，达到超过 10% 的水平。因此，根据此准则，在 $c = nu$ 的值大于或等于 0.5 时，U 控制图的性能足够。因此，子组大小应该至少为 $\frac{0.5}{\bar{u}}$ 。

附录 D：过度离散/欠离散

设 d_i 为来自子组 i 的不良品计数，设 n_i 为子组大小。

首先，对不良品计数进行正态化处理。考虑到可能子组大小不同，我们使用了调整的不良品计数 ($adjd_i$):

$adjd_i =$ 子组 $i = \frac{d_i}{n_i}(\bar{n})$ 的调整不良品计数，其中，

$\bar{n} =$ 平均子组大小

$$X_i = \sin^{-1} \sqrt{\frac{adjd_i + 3/8}{\bar{n} + 0.75}}$$

正态化计数 (X_i) 的标准差将等于 $\frac{1}{\sqrt{4 * \bar{n}}}$ 。因此其 2 倍的标准差等于 $\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$ 。

然后，将正态化计数当作数据，生成标准正态概率图。仅使用图点中位数即 50%分位数 来拟合回归线。查找已变换计数数据的第 25 个和第 75 个百分位，然后使用那些大于等于第 25 个和小于等于第 75 个百分位数的所有 X-Y 对。此回归线用于获取与 Z 值 -1 和 +1 对应的预测变换计数值。此回归中的“Y”数据是变换计数的正态得分值，“X”数据是变换计数。

按如下计算观测到的变异:

令 $Y(-1)$ 为对应于 $Z = -1$ 时预测变换计数

令 $Y(+1)$ 为对应于 $Z = +1$ 时预测变换计数

两个标准差的观测估计值 = $Y(+1) - Y(-1)$ 。

按如下计算预期变异:

$$\text{两个标准差的预期估计值} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$$

计算观测到的变异与预期变异的比率，并将此比率转换为百分比。如果百分比大于 130%，则将有超过 2% 的数据点位于控制限之外或位于控制限外的数据点数大于 1。如果出现上述状况，则是存在过度离散的证据。如果百分比小于 75%，则表示存在欠离散。

附录 E: Laney P' 和 U' 控制图

Laney P' 和 U' 控制图的相关概念是为了适用于以下情况：如果子组数据确实源自缺陷率或不良品率恒定的随机过程，但子组间观测到变异与预期变异不匹配。事实上，每个过程中的相关缺陷率或不良品率通常都会出现小的变化。在子组大小相对比较小时，子组中的抽样变异足够大，使这些小的变异不那么明显。随着子组大小的增大，抽样变异会减小，并且相关的缺陷率或不良品率的小变化变得足够大，导致误报率增大，从而对标准 P 和 U 控制图产生不利影响。有些示例显示误报率达到 70%。这种情况就是过度离散。

我们已开发了替代方法来补救此问题，以对子组 p 或 u 值进行正态化处理，并在 I 控制图中绘制这些正态化数据的图形。I 控制图使用正态化值的移动极差来确定其控制限。因此，I 控制图方法可以通过按次序向子组中添加不良品率或缺陷率变异来更改普遍原因导致的变异的定义。

Laney 方法可将数据变换回原始单位。其优势是，如果子组不一样大，则控制限将不固定，因为它们采用了 I 控制图方法。

P' 和 U' 控制图可将普遍原因导致的变异的新定义与具有不同子组大小所预期的变量控制限相结合。因此，这些控制图的重要假设是，普遍原因导致的变异的定义发生变更 - 它包括子组内的常见短期变异和预期在相邻子组间看到的平均短期变异。

Laney P' 控制图

设

X_i = 子组 i 中的缺陷点数

n_i = 子组 i 的子组大小

p_i = 子组 i 的不良品比率

$$\bar{p} = \frac{\sum X_i}{\sum n_i}$$

$$\sigma_{p_i} = \sqrt{\frac{\bar{p} * (1 - \bar{p})}{n_i}}$$

首先，将 p_i 转换为 z 得分值：

$$Z_i = \frac{p_i - \bar{p}}{\sigma_{p_i}}$$

接下来，以长度 2 的移动极差来估计 z 得分值中的变异，然后计算 Sigma Z (sz)。

$$\sigma_z = \frac{\overline{MR}}{1.128}$$

其中，1.128 是无偏常量。

将数据变换回原始尺度：

$$p_i = \bar{p} + \sigma p_i * \sigma z$$

因此, p_i 的标准差为:

$$sd(p_i) = \sigma p_i * \sigma z$$

控制限和中心线按如下计算:

$$\text{中心线} = \bar{p}$$

$$\text{UCL} = \bar{p} + 3 * sd(p_i)$$

$$\text{LCL} = \bar{p} - 3 * sd(p_i)$$

Laney U' 控制图

设

X_i = 子组 i 中的缺陷点数

n_i = 子组 i 的子组大小

u_i = 子组 i 的缺陷点率

$$\bar{u} = \frac{\sum X_i}{\sum n_i}$$

$$\sigma u_i = \sqrt{\frac{\bar{u} * (1 - \bar{u})}{n_i}}$$

首先, 将 p_i 转换为 z 得分值:

$$Z_i = \frac{u_i - \bar{u}}{\sigma u_i}$$

接下来, 以长度 2 的移动极差来估计 z 得分值的变异, 然后计算 Sigma Z (σz)。

$$\sigma z = \frac{\overline{MR}}{1.128}$$

其中, 1.128 是无偏常量。

将数据变换回原始尺度:

$$u_i = \bar{u} + \sigma u * \sigma z$$

因此, p_i 的标准差为:

$$sd(u_i) = \sigma u_i * \sigma z$$

控制限和中心线按如下计算:

$$\text{中心线} = \bar{u}$$

$$\text{UCL} = \bar{u} + 3 * sd(u_i)$$

$$LCL = \bar{u} - 3 * sd(u_i)$$

© 2015, 2017 Minitab Inc. All rights reserved.

Minitab®, Quality. Analysis. Results.® and the Minitab® logo are all registered trademarks of Minitab, Inc., in the United States and other countries. See minitab.com/legal/trademarks for more information.