

WHITE PAPER SOBRE O ASSISTENTE DO MINITAB

Este artigo é parte de uma série de artigos que explicam a pesquisa conduzida pelos estatísticos do Minitab para desenvolver os métodos e verificações de dados usados no Assistente no Minitab Statistical Software.

Cartas de controle de atributo

Visão geral

As cartas de controle são usadas para monitorar regularmente um processo, a fim de determinar se ele está em controle. Quando não é possível medir a qualidade de um produto ou serviço com dados contínuos, os dados de atributo são frequentemente coletados para avaliar sua qualidade. O Assistente do Minitab inclui duas cartas de controle amplamente utilizadas para monitorar um processo com dados de atributo:

- Carta P: esta carta é usada quando um produto ou serviço está caracterizado como defeituoso ou não defeituoso. A carta P expressa graficamente a proporção dos itens defeituosos por subgrupo. Os dados coletados são o número de itens defeituosos em cada subgrupo, que supostamente seguem uma distribuição binomial com um parâmetro de proporção desconhecido (p).
- Carta U: Esta carta é usada quando um produto ou serviço pode ter vários defeitos e o número de defeitos é contado. A carta U expressa graficamente o número de defeitos por unidade. Os dados coletados são o número total de defeitos em cada subgrupo, que supostamente seguem uma distribuição de Poisson com um número médio de defeitos por subgrupo desconhecido.

Os limites de controle para uma carta de controle normalmente são definidos na fase de controle de um projeto Six Sigma. Uma boa carta de controle deve ser sensível o suficiente para indicar rapidamente a existência de uma causa específica. Esta sensibilidade pode ser avaliada calculando o número médio de subgrupos necessário para indicar uma causa específica. Da mesma forma, uma boa carta de controle raramente indica um "falso positivo" quando o processo está em controle. A taxa de falsos positivos pode ser avaliada calculando o percentual de subgrupos considerados "fora de controle" quando o processo está em controle.

Para ajudar a avaliar se as cartas de controle estão apresentando bom desempenho, a Carta de Relatório do Assistente realiza automaticamente as verificações de dados a seguir:

- Estabilidade
- Número de subgrupos
- Tamanho do subgrupo
- Variação esperada

Neste artigo, nós investigamos como um gráfico de controle atributo se comporta quando estas condições variam e nós descrevemos como foi estabelecido um conjunto de diretrizes para avaliar os requisitos para estas condições.

Também explicamos que as cartas P e U de Laney que são recomendadas quando a variação observada nos dados não corresponde à variação esperada e o Minitab detecta superdispersão ou subdispersão.

Observação A carta P e a carta U dependem das suposições adicionais que não podem ser verificadas ou que são de difícil verificação. Consulte o Anexo A para obter mais detalhes.

Verificações dos dados

Estabilidade

Para cartas de controle de atributo, quatro testes podem ser realizados para avaliar a estabilidade do processo. O uso simultâneo destes testes aumenta a sensibilidade da carta de controle. Entretanto, é importante determinar a finalidade e o valor agregado de cada teste porque a taxa de falsos positivos aumenta conforme são adicionados mais testes à carta de controle.

Objetivo

Nós desejávamos determinar qual dos quatro testes para estabilidade deveria ser incluído com as cartas de controle de atributo no Assistente. Nosso objetivo era identificar os testes que aumentam significativamente a sensibilidade para as condições fora de controle sem elevar significativamente a taxa de falso alarme e garantir a simplicidade e praticidade das cartas.

Método

Os quatro testes para estabilidade para as cartas de atributo correspondem aos testes 1 a 4 para causas específicas para cartas de controle variáveis. Com um tamanho de subgrupo adequado, a proporção de itens com defeito (carta P) ou o número de defeitos por unidade (carta U) seguem uma distribuição normal. Como resultado, as simulações para as cartas de controle variáveis que também são baseadas na distribuição normal produzirão resultados idênticos para os testes de sensibilidade e taxa de falsos positivos. Portanto, nós usamos os resultados de uma simulação e uma revisão da literatura para cartas de controle variáveis a fim de avaliar como os quatro testes para estabilidade afetam a sensibilidade e a taxa de falsos positivos das cartas de atributo. Além disso, nós avaliamos a prevalência das causas específicas associadas ao teste. Para obter mais detalhes sobre o(s) método(s) usado(s) para cada teste, consulte a seção Resultados abaixo e o Anexo B.

Resultados

Dos quatro testes usados para avaliar a estabilidade nas cartas de atributo, nós descobrimos que os testes 1 e 2 são os mais úteis:

TESTE 1: IDENTIFICA PONTOS FORA DOS LIMITES DE CONTROLE

O teste 1 identifica pontos > 3 desvios padrão da linha central. O teste 1 é reconhecido universalmente como necessário para a detecção de situações fora de controle. Ele tem uma taxa de falsos positivos de somente 0,27%.

TESTE 2: IDENTIFICA OS DESLOCAMENTO NA PROPORÇÃO DE ITENS COM DEFEITO (CARTA P) OU O NÚMERO MÉDIO DE DEFEITOS POR UNIDADE (CARTA U)

O teste 2 indica quando 9 pontos em seguida caem no mesmo lado da linha . Nós executamos uma simulação para determinar o número de subgrupos necessários para detectar um sinal para um deslocamento na proporção de itens defeituosos (carta P) ou um

deslocamento no número médio de defeitos por unidade (carta U). Descobrimos que a adição do teste 2 aumenta significativamente a sensibilidade da carta para detectar pequenos deslocamentos na proporção de itens defeituosos ou o número médio de defeitos por unidade. Quando o teste 1 e o teste 2 são usados juntos, são necessários subgrupos em número significativamente menor para detectar um deslocamento pequeno em comparação com a utilização somente do teste 1. Portanto, a adição do teste 2 ajuda a detectar situações fora de controle comuns e aumenta a sensibilidade o suficiente para garantir um leve aumento na taxa de falsos positivos.

Testes não incluídos no Assistente

TESTE 3: PONTOS K EM SEQUÊNCIA, TODOS CRESCENTES OU DECRESCENTES

O teste 3 foi projetado para detectar deslocamentos na proporção de itens defeituosos ou no número médio de defeitos por unidade (Davis e Woodall, 1988). Entretanto, quando o teste 3 é usado além dos testes 1 e 2, não há um aumento significativo da sensibilidade na carta. Como nós já decidimos usar os testes 1 e 2 com base em nossos resultados de simulação, a inclusão do teste 3 não agregaria nenhum valor significativo à carta.

TESTE 4: PONTOS K EM SEQUÊNCIA, ALTERNANDO ACIMA E ABAIXO

Embora este padrão possa ocorrer na prática, recomendamos que você procure por tendências ou padrões incomuns em vez do teste para um padrão específico.

Portanto, o Assistente usa somente o teste 1 e o teste 2 para verificar a sensibilidade nas cartas de controle de atributo e exibe os seguintes indicadores de status no Relatório de cartão:

Status	Condição
	Nenhuma falha no teste 1 ou no teste 2 na carta.
	Se as condições acima não vigorarem.

Número de subgrupos

Se não existem valores conhecidos para os limites de controle, eles podem ser estimados a partir dos dados. Para obter estimativas precisas dos limites, você deve ter dados suficientes. Se a quantidade de dados for suficiente, os limites de controle podem estar longe dos limites "verdadeiros" devido à variabilidade da amostra. Para aprimorar a precisão dos limites, é possível aumentar o número de subgrupos.

Objetivo

Nós investigamos o número de subgrupos que são necessários para a obtenção de limites de controle precisos para a carta P e a carta U. Nosso objetivo foi determinar o número de subgrupos necessário para garantir que a taxa de falsos positivos devida ao teste 1 não seja maior do que 2% com 95% de confiança. Nós não avaliamos o efeito do número de

subgrupos na linha central (teste 2) porque as estimativas da linha central são mais precisas do que as estimativas dos limites de controle.

Método

Com um tamanho de subgrupo adequado e nenhum erro devido à variabilidade de amostragem, o percentual de pontos acima do limite de controle é 0,135%. Para determinar se o número de subgrupo é adequado, nós seguimos o método descrito por Trietsch (1999) para garantir que a taxa de falsos positivos devido a pontos acima do limite de controle superior não seja superior a 1% com 95% de confiança. Devido à simetria dos limites de controle, este método resulta em uma taxa de falsos positivos de 2% para o teste 1. Consulte o Anexo C para obter mais detalhes.

Resultados

CARTA P

Para garantir que a taxa de falsos positivos devido ao teste 1 não exceda 2%, o número de subgrupos (m) necessário para a carta P, com base em vários tamanhos de subgrupo (n) e proporções (\bar{p}), é mostrado abaixo.

Tamanho do subgrupo (n)	\bar{p}				
	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1
10	1881	421	228	60	35
50	425	109	64	23	16
100	232	65	41	17	13
150	165	49	32	14	11
200	131	41	27	13	10
500	65	24	18	10	9

CARTA U

Para garantir a taxa de falsos positivos devido ao teste 1 não exceda 2%, o número de subgrupos (m) necessário para a carta U para cada valor do número médio de defeitos por subgrupo (\bar{c}) é mostrado abaixo.

\bar{c}	0,1	0,3	0,5	0,7	1,0	3,0	5,0	10,0	30,0	50,0
Número de subgrupos	232	95	65	52	41	22	18	14	10	9

Com base nesses resultados, o Cartão do Relatório do Assistente exibe os indicadores de status a seguir quando verificar o número de subgrupos nas cartas de controle de atributo:

Status	Condição
	Número de subgrupos \geq Número necessário. O número de subgrupos é grande o suficiente, para que, com 95% de confiança, a taxa de falsos positivos devido ao teste 1 não exceda a 2%.
	Se as condições acima não vigorarem.

Tamanho do subgrupo

A distribuição normal pode ser usada para aproximar a distribuição da proporção de itens defeituosos (\hat{p}) na carta P e a distribuição do número de defeitos por unidade (\hat{u}) na carta U. Conforme o tamanho do subgrupo aumenta, a exatidão desta aproximação é melhorada. Como os critérios para os testes usados em cada carta de controle são baseados na distribuição normal, aumentar o tamanho do subgrupo para obter uma aproximação normal melhora a capacidade da carta para identificar com precisão situações fora de controle e reduzir a taxa de falsos positivos. Quando a proporção de itens com defeito ou o número de defeitos por unidade for baixo, serão necessários subgrupos maiores para garantir resultados precisos.

Objetivo

A Minitab investigou o tamanho de subgrupo necessário para garantir que a aproximação normal seja adequada o suficiente para obter resultados precisos para a carta P e carta U.

Método

Nós executamos simulações para avaliar as taxas de falsos positivos para vários tamanhos de subgrupo e para várias proporções (p) para a carta P e para vários números médios de defeitos por subgrupo (c) para a carta U. Para determinar se o tamanho do subgrupo foi grande o suficiente para obter uma aproximação normal adequada e, portanto, uma taxa de falsos positivos baixa o suficiente, nós comparamos os resultados com a taxa de falsos positivos esperadas no caso de suposição normal (0,27% para o teste 1 e 0,39% para o teste 2). Consulte o Anexo D para obter mais detalhes.

Resultados

CARTA P

Nossa pesquisa mostrou que o tamanho de subgrupo necessário para a carta P depende da proporção de itens defeituosos (p). Quanto menor o valor de p , maior o tamanho do subgrupo (n) que é necessário. Quando o produto np é maior ou igual a 0,5, a taxa de falsos positivos combinada para o teste 1 e teste 2 é abaixo em aproximadamente 2.5%. Entretanto, quando o produto np é menor do que 0,5, a taxa de falsos positivos combinada para os testes 1 e 2 pode ser muito mais alta, alcançando níveis bem acima de 10%.

Portanto, com base nestes critérios, o desempenho da carta P é adequado quando o valor de $np \geq 0,5$.

Quando verificar o tamanho do subgrupo para a carta P, a Carta do Relatório do Assistente exibe os indicadores de status a seguir:

Status	Condição
	$n_i \bar{p} \geq 0,5$ para todos os i em que n_i = o tamanho do subgrupo para o iº subgrupo \bar{p} = proporção média para itens defeituosos
	Se a condição acima não vigorar.

CARTA U

Nossa pesquisa mostrou que o tamanho de subgrupo necessário para a carta U depende do número de defeitos por subgrupo (c), que é igual ao tamanho do subgrupo (n) multiplicado pelo número de defeitos por unidade (u). O percentual de falsos positivos é maior quando o número de defeitos c é pequeno. Quando $c = nu$ é maior que ou igual a 0,5, a taxa de falsos positivos combinada para o teste 1 e o teste 2 é menor do que aproximadamente 2,5%. Entretanto, para valores de c menores do que 0,5, a taxa de falsos positivos combinada para os testes 1 e 2 pode ser muito maior, alcançando níveis bem acima de 10%. Portanto, com base nesse critério, o desempenho da carta U é adequado quando o valor de $c = nu \geq 0,5$.

Quando verificar o tamanho do subgrupo para a carta U, o Cartão de Relatório do Assistente exibe os indicadores de status a seguir:

Status	Condição
	$n_i \bar{u} \geq 0,5$ para todos os i em que n_i = o tamanho do subgrupo para o iº subgrupo \bar{u} = número médio de defeitos por unidade
	Se a condição acima não vigorar.

Variação esperada

As cartas P e cartas U tradicionais supõem que a variação nos dados segue a distribuição binomial para os defeituosos ou a distribuição de Poisson para defeitos. As cartas também supõem que sua taxa de defeituosos ou defeitos permanece constante ao longo do tempo. Quando a variação nos dados for maior ou menor do que o esperado, seus dados podem apresentar superdispersão ou subdispersão e as cartas podem não desempenhar da forma esperada.

Superdispersão

A superdispersão existe quando a variação nos dados é maior do que o esperado. Normalmente, existe alguma variação na taxa de defeituosos ou de defeitos ao longo do tempo, causada por fatores de ruído externo que não são causas especiais. Na maioria das aplicações dessas cartas, a variação amostral das estatísticas de subgrupo é grande o suficiente para que a variação na taxa subjacente de defeituosos e defeitos seja perceptível. Entretanto, conforme os tamanhos do subgrupo aumentam, a amostragem fica cada vez menor e, em determinado ponto, a variação na taxa de defeitos subjacente pode ficar maior do que a variação da amostragem. O resultado é uma carta com limites de controle extremamente estreitos e uma taxa de falsos positivos muito alta.

Subdispersão

A subdispersão existe quando a variação em seus dados é menor do que o esperado. A subdispersão pode ocorrer quando subgrupos adjacentes estão correlacionados uns com os outros, o que também é conhecido como autocorrelação. Por exemplo, conforme uma ferramenta se desgasta, o número de defeitos pode aumentar. O aumento na contagem de defeitos entre os subgrupos pode tornar os subgrupos mais semelhantes do que seria por acaso. Quando os dados apresentam subdispersão, os limites de controle em uma carta P ou carta U tradicional pode ser muito largos. Se os limites de controle forem largos demais, a carta raramente vai sinalizar, o que significa que você pode ignorar a variação de causa especial e confundir-la com variação de causa comum.

Se a superdispersão ou subdispersão for severa o suficiente, a Minitab recomenda o uso de uma carta P ou U de Laney. Para obter mais informações, consulte as cartas P e U de Laney abaixo.

Objetivo

Nós desejávamos determinar um método para detectar a superdispersão e subdispersão nos dados.

Método

Realizamos uma pesquisa na literatura e encontramos vários métodos para detectar superdispersão e subdispersão. Selecionamos um método diagnóstico encontrado em Jones e Govindaraju (2001). Este método usa um gráfico de probabilidade para determinar a quantidade de variação esperada se os dados forem provenientes de uma distribuição binomial para dados defeituosos ou uma distribuição de Poisson para dados de defeitos. Depois disso, é feita uma comparação entre a quantidade de variação esperada e a

quantidade de variação observada. Consulte o Anexo E para obter mais detalhes sobre o método de diagnóstico.

Como parte da busca por superdispersão, o Minitab também determina quantos pontos estão fora dos limites de controle nas cartas P e U tradicionais. Como o problema de superdispersão é uma alta taxa de falsos positivos, se somente um pequeno percentual de pontos estiverem fora de controle, é pouco provável que a superdispersão seja um problema.

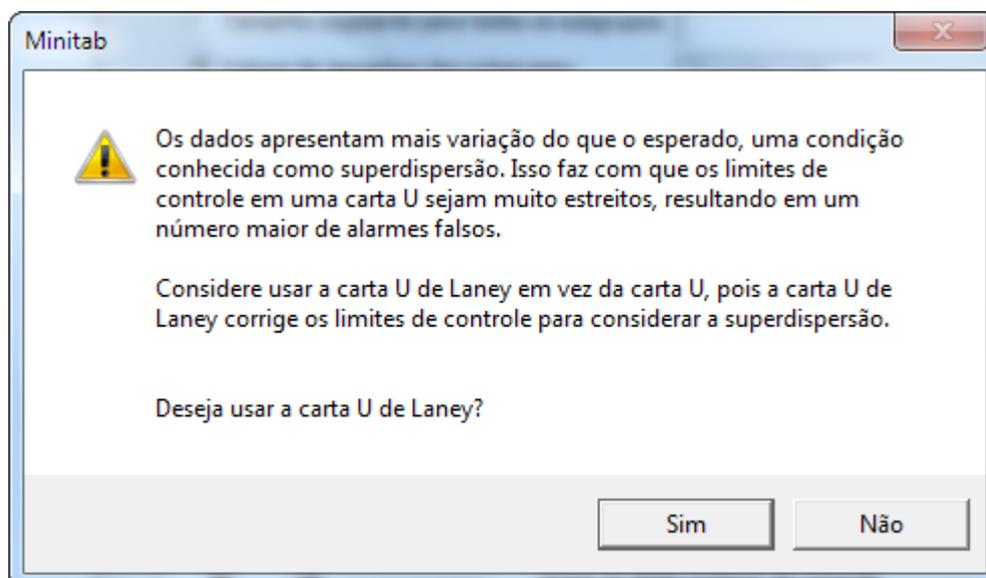
Resultados

O Minitab realiza a verificação de diagnóstico para superdispersão e subdispersão depois que o usuário selecionar OK na caixa de diálogo para a carta P ou U antes de a carta ser exibida.

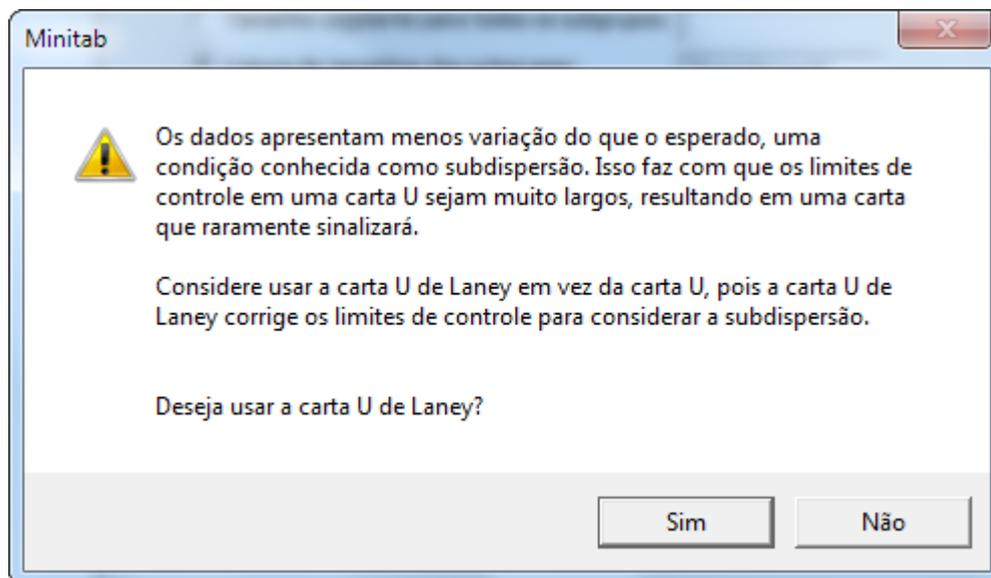
A superdispersão existe quando as condições a seguir são atendidas:

- A proporção de variação observada para a variação esperada é maior do que 130%.
- Mais do que 2% dos pontos estão fora dos limites de controle.
- O número de pontos fora dos limites de controle é maior do que 1.

Se a superdispersão for detectada, o Minitab exibe uma mensagem que pergunta se o usuário deseja exibir a carta P ou U de Laney. Apresentamos abaixo a mensagem para a carta P:



A subdispersão existe quanto a proporção da variação observada para a variação esperada for menor do que 75%. o Minitab exibe uma mensagem que pergunta se o usuário deseja exibir a carta P ou U de Laney. Apresentamos abaixo a mensagem para a carta P:



Se o usuário optar por usar a carta de Laney, o Minitab exibe a carga de Laney no Relatório de Resumo. Se o usuário optar por não usar a carta de Laney, o Minitab exibe a carta P ou U tradicional no Relatório de Resumo. Entretanto, tanto a carta tradicional como a carta de Laney são exibidas no Relatório de Diagnóstico. Mostrar ambas as cartas permite que o usuário veja o efeito da superdispersão ou subdispersão na carta P ou U tradicional e determine se a carta de Laney é mais apropriada para seus dados.

Além disso, quando procurar por superdispersão ou subdispersão, o Cartão de Relatório do Assistente exibe os indicadores de status a seguir:

Status	Condição
	Proporção da dispersão > 130%, menos do que 2% dos pontos fora dos limites de controle ou número de pontos fora dos limites de controle = 1 Proporção da dispersão > 75% e <= 130% Proporção da dispersão > 130%, mais do que 2% dos pontos fora dos limites de controle e número de pontos fora dos limites de controle > 1 e o usuário opta por usar carta P' ou U' de Laney' Proporção da dispersão < 75% e o usuário opta por usar a carta P' ou U' de Laney Em que $\text{Proporção da dispersão} = 100 * (\text{variação observada}) / (\text{variação esperada})$
	Proporção da dispersão > 130%, mais do que 2% dos pontos fora dos limites de controle e o número de pontos fora dos limites de controle > 1 e o usuário não optou por usar carta P' ou U' de Laney Proporção da dispersão < 75% e o usuário não optou por usar a carta P' ou U' de Laney

Cartas P' e U' de Laney

As cartas P e U tradicionais supõem que a variação nos dados segue a distribuição binomial para dados defeituosos ou uma distribuição de Poisson para dados de defeito. As cartas também supõem que a taxa de defeituosos e defeitos permanece constante ao longo do tempo. O Minitab realiza uma verificação para determinar se a variação nos dados é maior ou menor que o esperado, uma indicação de que os dados podem ter superdispersão ou subdispersão. Consulte a verificação de dados com Variação esperada acima.

Se a superdispersão ou subdispersão estiverem presentes nos dados, as cartas P e U tradicionais podem não apresentar o desempenho esperado. A superdispersão pode fazer com que os limites de controle sejam estreitos demais, resultando em uma taxa de falsos positivos alta. A subdispersão pode fazer com que os limites de controle sejam largos demais, o que pode fazer com que você ignore as variações de causa especial e confunda-a com uma variação de causa comum.

Objetivo

Nosso objetivo era identificar uma alternativa para as cartas P e U quando for detectada a superdispersão ou subdispersão nos dados.

Método

Revisamos a literatura e determinamos que a melhor abordagem para lidar com a superdispersão e subdispersão são as cartas P' e U' de Laney (Laney, 2002). O método de Laney usa uma definição revisada da variação de caixa comum, que corrige os limites de controle que sejam estreitos demais (superdispersão) ou largos demais (subdispersão).

Nas cartas de Laney, a variação de causa comum inclui o curto prazo usual com a variação de subgrupo, mas também inclui a variação de curto prazo média entre subgrupos consecutivos. A variação de causa comum para as cartas de Laney é calculada normalizando-se os dados e utilizando-se o intervalo móvel médio dos subgrupos adjacentes (conhecidos como Sigma Z nas cartas de Laney) para ajustar os limites de controle P ou U padrão. Inclusive, a variação entre os subgrupos consecutivos ajuda a corrigir o efeito quando a variação nos dados entre os subgrupos é maior ou menor do que o esperado devido a flutuações na taxa de defeito subjacente ou a uma falta de aleatoriedade nos dados.

Depois que o Sigma Z é calculado, os dados são transformados de volta para as unidades originais. O uso das unidades de dados originais é benéfico porque, se os tamanhos do subgrupo não forem iguais, os limites de controle poderão variar somente quando eles estiverem nas cartas P e U tradicionais. Para obter mais informações sobre as cartas P' e U' de Laney, consulte o Anexo F.

Resultados

O Minitab realiza procura por superdispersão ou subdispersão e, se uma das duas condições for detectada, o Minitab recomenda uma carta P' ou U'.

Referências

- AIAG (1995). Statistical process control (SPC) reference manual. Automotive Industry Action Group.
- Bischak, D.P., & Trietsch, D. (2007). The rate of false signals in \bar{X} control charts with estimated limits. *Journal of Quality Technology*, 39, 55–65.
- Bowerman, B.L., & O'Connell, R.T. (1979). *Forecasting and time series: An applied approach*. Belmont, CA: Duxbury Press.
- Chan, L. K., Hapuarachchi K. P., & Macpherson, B.D. (1988). Robustness of \bar{X} and R charts. *IEEE Transactions on Reliability*, 37, 117–123.
- Davis, R.B., & Woodall, W.H. (1988). Performance of the control chart trend rule under linear shift. *Journal of Quality Technology*, 20, 260–262.
- Jones, G., & Govindaraju, K. (2001). A Graphical Method for Checking Attribute Control Chart Assumptions, *Quality Engineering*, 13(1), 19-26.
- Laney, D. (2002). Improved Control Charts for Attributes. *Quality Engineering*, 14(4), 531-537.
- Montgomery, D.C. (2001). *Introduction to statistical quality control*, 4th edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Schilling, E.G., & Nelson, P.R. (1976). The effect of non-normality on the control limits of \bar{X} charts. *Journal of Quality Technology*, 8, 183–188.
- Trietsch, D. (1999). *Statistical quality control: A loss minimization approach*. Singapore: World Scientific Publishing Co.
- Wheeler, D.J. (2004). *Advanced topics in statistical process control. The power of Shewhart's charts*, 2nd edition. Knoxville, TN: SPC Press.
- Yourstone, S.A., & Zimmer, W.J. (1992). Non-normality and the design of control charts for averages. *Decision Sciences*, 23, 1099–1113.

Anexo A: Suposições adicionais para cartas de controle de atributo

A carta P e a carta U exibem suposições adicionais que não são avaliadas por verificações de dados:

Carta P	Carta U
<ul style="list-style-type: none">Os dados consistem em n itens distintos, com cada item classificado como defeituoso e não defeituoso.A probabilidade de um item ser defeituoso é a mesma para cada item dentro de um subgrupo.A probabilidade de um item defeituoso não ser afetado se o item precedente for ou não defeituoso.	<ul style="list-style-type: none">As contagens são contagens de eventos discretos.Os eventos discretos ocorrem dentro de algumas regiões finitas bem definidas de espaço, tempo ou produto.Os eventos ocorrem de independentemente usando outros, e a probabilidade de um evento é proporcional ao tamanho da área da oportunidade.

Para cada carta, as primeiras duas suposições são parte inerente do processo de coleta dos dados, os dados em si não podem ser usados para verificar se estas suposições são satisfeitas. A terceira suposição pode ser verificada somente com uma análise detalhada e avançada dos dados, que não é realizada no Assistente.

Anexo B: Estabilidade

Simulação B1: Como a adição do teste 2 ao teste 1 afeta a sensibilidade

O teste 1 detecta pontos fora de controle sinalizando quando um ponto é maior do que 3 desvios padrão da linha central. O teste 2 detecta deslocamentos na proporção de itens defeituosos ou o número de defeitos por unidade sinalizando quando 9 pontos em sequência caem no mesmo lado da linha central.

Para avaliar se a utilização do teste 2 com o teste 1 aumenta a sensibilidade das cartas de atributo, nós estabelecemos limites de controle com base em uma distribuição normal (p , $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$) (p é a proporção de itens defeituosos e n é o tamanho do subgrupo) para a carta P e em uma distribuição normal (u , \sqrt{u}) (u é o número médio de defeitos por unidade) para a carta U. Nós deslocamos o local (p ou u) de cada distribuição por um múltiplo do desvio padrão (SD) e, em seguida, registramos o número de subgrupos necessários para detectar um sinal para cada uma das 10.000 iterações. Os resultados são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1 Número médio de subgrupos até a falha de um teste 1 (Teste 1), falha de um teste 2 (Teste 2) ou falha do teste 1 ou teste 2 (Teste 1 ou 2). O deslocamento é igual a um múltiplo do desvio padrão (SD).

Turno	Teste 1	Teste 2	Teste 1 ou 2
0,5 SD	154	84	57
1 SD	44	24	17
1,5 SD	15	13	9
2 SD	6	10	5

Como mostrado na tabela, quando ambos os testes são usados (coluna do *teste 1 ou 2*) são necessários, em média, 57 subgrupos para detectar um deslocamento de desvio padrão de 0,5 no local, em comparação com a média de 154 subgrupos necessários para detectar um deslocamento de desvio padrão de 0,5 quando o teste 1 é usado sozinho. Portanto, a utilização de ambos os testes aumenta significativamente a sensibilidade para detectar pequenos deslocamentos na proporção de itens defeituosos ou o número médio de defeitos por unidade. Entretanto, como o tamanho do deslocamento aumenta, a adição do teste 2 não aumenta a sensibilidade de maneira muito significativa.

Anexo C: Número de subgrupos

Fórmula C1: Número de subgrupos necessários para a Carta P com base em um IC de 95% para o limite de controle superior

Para determinar se existem subgrupos suficientes para garantir que a taxa de falsos positivos permaneça razoavelmente baixa, nós seguimos Bischak (1999) e determinamos o número de subgrupos que garantirá que a taxa de falsos positivos devida para o teste 1 não seja superior a 2% com 95% de confiança.

Primeiramente, nós encontramos o valor p_c de tal forma que

$$p_c + 3 \sqrt{\frac{p_c(1 - p_c)}{n}} = \bar{p} + z_{0,99} \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}}$$

em que

p_c = proporção que produz uma taxa de falsos positivos de 1% acima do limite de controle, supondo-se que \bar{p} seja o valor real de p . Devido à simetria dos limites de controle, a taxa de falsos positivos total fica em 2% quando ambos os limites de controle superiores e inferiores são considerados.

n = tamanho do subgrupo (se o tamanho do subgrupo variar, será utilizado o tamanho médio do subgrupo)

\bar{p} = proporção média de itens com defeito

z_p = cdf inverso avaliado em p para a distribuição normal com média=0 e desvio padrão=1

Para determinar o número de subgrupos, nós calculamos um limite de confiança 95% mais baixo para a limite de controle superior e o definimos igual a p_c ,

$$p_c = \bar{p} - z_{0,95} \sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{nm}}$$

e calculamos para m , que produz o seguinte resultado:

$$m = \frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n \left(\frac{\bar{p} - p_c}{z_{0,95}}\right)^2}$$

Usando esta fórmula, nós determinamos o número de subgrupos necessário para garantir que a taxa de falsos positivos acima do limite de controle superior permaneça abaixo de 1% com confiança de 95% ára várias proporções e tamanhos de subgrupo, como mostrado na Tabela 2.. Devido à simetria dos limites de controle, este é o mesmo número de subgrupos que é necessário para garantir que a taxa de falsos positivos total devido ao teste 1 para a carta P permaneça abaixo de 2% com confiança de 95%.

Tabela 2 Número de subgrupo (m) para os vários tamanhos de subgrupo (n) e proporções (\bar{p})

Tamanho de subgrupo (n)	\bar{p}				
	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1
10	1881	421	228	60	35
50	425	109	64	23	16
100	232	65	41	17	13
150	165	49	32	14	11
200	131	41	27	13	10
500	65	24	18	10	9

Observação Para as cartas de controle variáveis, nós limitamos a taxa de falsos positivos total devido ao teste 1 em 1%. Para cartas de atributo, nós aliviamos o critério para 2% por razões práticas. Em muitos casos, a proporção de itens defeituosos na carta P é pequena, o que demanda um número extremamente grande de subgrupos para alcançar a precisão, conforme mostrado na Tabela 2.

Fórmula C2: Número de subgrupos necessários para a Carta U com base em um IC de 95% para o limite de controle superior

Utilizamos a mesma abordagem descrita acima para a carta P. Seguindo Trietsch (1999), nós determinamos o número de subgrupos que garantirá que a taxa de falsos positivos total devido ao teste 1 não seja superior a 2% com 95% de confiança.

Primeiramente, encontramos um c_c de forma que

$$c_c + 3\sqrt{c_c} = \bar{c} + z_{0,99}\sqrt{\bar{c}}$$

em que

c_c = número médio de defeitos por subgrupo que produz uma taxa de falsos positivos de 1% acima do limite de controle superior, supondo-se que \bar{c} seja o valor verdadeiro de c .
Devido à simetria dos limites de controle, a taxa de falsos positivos total devida para o teste 1 fica em 2% quando os limites superior e inferior são combinados.

\bar{c} = número de defeitos por subgrupo (se o tamanho do subgrupo variar, será utilizado o tamanho médio do subgrupo)

z_p = cdf inverso avaliado em p para a distribuição normal com média=0 e desvio padrão=1

Para determinar o número de subgrupos, nós calculamos um limite de confiança 95% mais baixo para a limite de controle superior e o definimos igual a c_c ,

$$c_c = \bar{c} - z_{0,95} \sqrt{\frac{\bar{c}}{m}}$$

e calculamos para m , que produz o seguinte resultado:

$$m = \frac{\bar{c}}{\left(\frac{\bar{c} - c_c}{z_{0,95}}\right)^2}$$

Alguns resultados baseados nos cálculos acima são mostrados na Tabela 3.

Tabela 3 Número de subgrupos (m) para vários valores para o número médio de defeitos por subgrupo (\bar{c})

\bar{c}	0,1	0,3	0,5	0,7	1,0	3,0	5,0	10,0	30,0	50,0
Número de subgrupos	232	95	65	52	41	22	18	14	10	9

Observação Para as cartas de controle variáveis, nós limitamos a taxa de falsos positivos devido ao teste 1 em 1%. Para cartas de atributo, nós aliviamos o critério para 2% por razões práticas. Em muitos casos, o número de defeitos por subgrupo é pequeno, o que demanda um número extremamente grande de subgrupos para alcançar a precisão, conforme mostrado na Tabela 3.

Anexo D: Tamanho do subgrupo

O teorema do limite central afirma que a distribuição normal pode aproximar a distribuição da média de uma variável aleatória independente identicamente distribuída. Para a carta P, \hat{p} (proporção do subgrupo) é a média de uma variável aleatória de Bernoulli independente e identicamente distribuída. Para a carta U, \hat{u} (taxa de subgrupo) uma variável aleatória de Poisson independente e identicamente distribuída. Portanto, a distribuição normal pode ser usada como uma aproximação em ambos os casos.

A precisão da aproximação melhora conforme o tamanho do subgrupo aumenta. A aproximação também melhora com uma proporção mais alta de itens defeituosos (carta P) ou um número de defeitos mais alto por unidade (carta U). Quando o tamanho do subgrupo for pequeno ou os valores de p (carta P) ou de u (carta U) forem pequenos, as distribuições para \hat{p} e \hat{u} são assimétricas à direita, o que aumenta a taxa de falsos positivos. Portanto, nós podemos avaliar a precisão da aproximação normal observando a taxa de falsos positivos, bem como podemos determinar o tamanho mínimo de subgrupo necessário para obter uma aproximação normal adequada.

Para fazer isso, realizamos simulações para avaliar as taxas de falsos positivos para vários tamanhos de subgrupo para a carta P e a carta U e comparamos os resultados com a taxa de falsos positivos esperada sob a suposição normal (0,27% para o teste 1 e 0,39% para o teste 2).

Simulação D1: Relação entre o tamanho do subgrupo, a proporção e a taxa de falsos positivos da carta P

Utilizando um conjunto inicial de 10.000 subgrupos, nós estabelecemos os limites de controle para vários tamanhos de subgrupo (n) e as proporções (p). Nós também registramos o percentual de falsos positivos para um adicional de 2.500 subgrupos. Depois disso, executamos 10.000 iterações e calculamos o percentual médio de falsos positivos do teste 1 e do teste 2, conforme mostrado na Tabela 4.

Tabela 4 % de falsos positivos devido ao teste 1, teste 2 (np) para vários tamanhos de subgrupo (n) e proporções (p)

Tamanho de subgrupo (n)	p				
	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1
10	0,99, 87,37 (0,01)	4,89, 62,97 (0,05)	0,43, 40,14 (0,1)	1,15, 1,01 (0,5)	1,28, 0,42 (1)
50	4,88, 63,00 (0,05)	2,61, 10,41 (0,25)	1,38, 1,10 (0,5)	0,32, 0,49 (2,5)	0,32, 0,36 (5)

Tamanho de subgrupo (n)	p				
	0,001	0,005	0,01	0,05	0,1
100	0,47, 40,33 (0,10)	1,41, 1,12 (0,5)	1,84, 0,49 (1)	0,43, 0,36 (5)	0,20, 0,36 (10)
150	1,01, 25,72 (0,15)	0,71, 0,43 (0,75)	0,42, 0,58 (1,5)	0,36, 0,42 (7,5)	0,20, 0,36 (15)
200	1,74, 16,43 (0,2)	1,86, 0,50 (1,00)	0,43, 0,41 (2)	0,27, 0,36 (10)	0,34, 0,36 (20)
500	1,43, 1,12 (0,5)	0,42, 0,50 (2,5)	0,52, 0,37 (5)	0,32, 0,37 (25)	0,23, 0,36 (50)

Os resultados na Tabela 4 mostram que o percentual de falsos positivos é geralmente o mais alto quando a proporção (p) é pequena, como 0,001 ou 0,005, ou quando o tamanho amostral for pequeno (n=10). Portanto, o percentual de falsos positivos é o mais alto quando o valor do produto np é pequeno e o menor quando np for grande. Quando np for maior ou igual a 0,5, a taxa de falsos positivos combinados para o teste 1 e para o teste 2 estiver abaixo de aproximadamente 2,5%. Entretanto, para valores de np menores do que 0,5, a taxa de falsos positivos combinada para os teste 1 e 2 é muito mais alta, alcançando a níveis bem acima de 10%. Portanto, com base nestes critérios, o desempenho da carta P é adequado quando o valor de np $\geq 0,5$. Dessa forma, o tamanho do subgrupo deve ser de pelo menos $\frac{0,5}{\bar{p}}$.

Simulação D2: Relação entre o tamanho do subgrupo, número de defeitos por unidade e taxa de falsos positivos da carta U

Utilizando um conjunto inicial de 10.000 subgrupos, nós estabelecemos os limites de controle para vários tamanhos de subgrupo (n) e número de defeitos por subgrupo (c). Nós também registramos o percentual de falsos positivos para um adicional de 2.500 subgrupos. Depois disso, executamos 10.000 iterações e calculamos o percentual médio de falsos positivos do teste 1 e do teste 2, conforme mostrado na Tabela 5.

Tabela 5 % de falsos positivos devido ao teste 1, teste 2 para números variados de defeitos por subgrupo (c = nu)

c	0,1	0,3	0,5	0,7	1,0	3,0	5,0	10,0	30,0	50
% de falsos positivos	0,47, 40,40	3,70, 6,67	1,44, 1,13	0,57, 0,39	0,36, 0,51	0,38, 0,40	0,54, 0,38	0,35, 0,37	0,29, 0,37	0,25, 0,37

Os resultados na Tabela 5 mostram que o percentual de falsos positivos é o maior quando o produto do tamanho do subgrupo (n) multiplicado pelo número de defeitos por unidade (u), que é igual ao número de defeitos por subgrupo (c), é pequeno. Quando c for maior ou igual a 0,5, a taxa de falsos positivos combinados para o teste 1 e para o teste 2 estiver abaixo de aproximadamente 2,5%. Entretanto, para valores de c menores do que 0,5, a taxa de falsos positivos combinada para os testes 1 e 2 é muito mais alta, alcançando níveis bem acima de 10%. Portanto, com base nesse critério, o desempenho da carta U é adequado quando o valor de $c = nu \geq 0,5$. Dessa forma, o tamanho do subgrupo deve ser de pelo menos $\frac{0,5}{\bar{u}}$.

Anexo E: Superdispersão e Subdispersão

Permita que d_i seja a contagem de defeituosos no subgrupo i , e n_i seja o tamanho do subgrupo.

Primeiramente, normalize a contagem de defeituosos. Para explicar os possíveis tamanhos diferentes de subgrupo, use as contagens de defeituosos ajustada ($d_i a_j$):

$d_i a_j$ = contagem de defeituosos ajustada para o subgrupo $i = \frac{d_i}{n_i}(\bar{n})$, em que

\bar{n} = tamanho de subgrupo médio

$$X_i = \sin^{-1} \sqrt{\frac{d_i a_j + 3/8}{\bar{n} + 0,75}}$$

As contagens normalizadas (X_i) terão um desvio padrão igual a $\frac{1}{\sqrt{4 * \bar{n}}}$. Isso significa que 2 desvios padrão são iguais a $\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$.

Depois disso, gere um gráfico de probabilidade normal padrão usando as contagens normalizadas como dados. Uma linha de regressão é ajustada usando somente os 50% centrais dos pontos do gráfico. encontre o 25º e o 75º percentis dos dados de contagem transformados e use todos os pares $X-Y \geq 25^\circ$ percentil e $\leq 75^\circ$ percentil. Esta linha é usada para obter os valores de contagem transformados e previstos correspondentes aos valores Z de -1 e +1. Os dados "Y" nesta regressão são as pontuações normais das contagens transformadas e os dados "X" são as contagens transformadas.

Calcule a variação observada da seguinte maneira:

Permita que $Y(-1)$ seja a contagem transformada prevista para $Z = -1$

Permita que $Y(+1)$ seja a contagem transformada prevista para $Z = +1$

Estimativa observada de 2 desvios padrão = $Y(+1) - Y(-1)$.

Calcule a variação esperada da seguinte maneira:

Estimativa esperada de 2 desvios padrão = $\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$

Calcule a proporção de variação observada para a variação esperada e converta para um percentual. Se o percentual for $> 130\%$, mais do que 2% dos pontos estão fora dos limites de controle, e o número de pontos fora dos limites de controle forem > 1 , existe evidência de superdispersão. Se o percentual for $< 75\%$, existe evidência de subdispersão.

Anexo F: Cartas P' e U' de Laney

O conceito por trás das cartas P' e U' de Laney existe para explicar casos em que a variação observada entre os subgrupos não corresponde à variação esperada se os dados do subgrupo forem provenientes de um processo aleatório com uma taxa constante de defeitos e defeituosos. As pequenas alterações na taxa subjacente dos defeitos e defeituosos ocorre normalmente em todos os processos. Quando os tamanhos de subgrupo forem relativamente pequenos, a variação na amostragem nos subgrupos será larga o suficiente para que essas pequenas alterações não sejam perceptíveis. Conforme os tamanhos de subgrupo aumentam, a variação na amostragem diminuem e as pequenas alterações na taxa subjacente de defeitos e defeituosos fica grande o suficiente para afetar adversamente as cartas P e U padrão aumentando a taxa de falsos positivos. Alguns exemplos mostram taxas de falsos positivos como altas, na faixa de 70%. Esta condição é conhecida como superdispersão.

Um método alternativo foi desenvolvido para corrigir este problema, que normaliza os valores de p ou u do subgrupo, e expressa graficamente os dados normalizados em uma carta I. A carta I usa um intervalo móvel dos valores normalizados para determinar seus limites de controle. Portanto, o método da carta I altera a definição de variação de causa comum adicionando a variação aos defeituosos ou à taxa de defeitos de um subgrupo para o subgrupo seguinte.

O método de Laney transforma os dados de volta para as unidades originais. A vantagem disso é que, se os subgrupos não forem todos do mesmo tamanho, os limites de controle não serão fixos, como ele são com o método da Carta I.

As cartas P' e U' combinam a nova definição de variação de causa comum com os limites de controle de variável esperado a partir de tamanhos de subgrupo diferentes. Portanto, a principal suposição dessas cartas é que a definição de variação de causa comum é alterada — ela inclui a variação de curto prazo usual que está presente dentro dos subgrupos mais a variação de curto prazo média esperada entre subgrupos consecutivos.

Carta P' de Laney

Permita que

X_i = número de defeituosos no subgrupo

n_i = tamanho de subgrupo para o subgrupo i

p_i = proporção de defeituosos para o subgrupo i

$$\bar{p} = \frac{\sum X_i}{\sum n_i}$$

$$\sigma_{p_i} = \sqrt{\frac{\bar{p} * (1 - \bar{p})}{n_i}}$$

Primeiramente, converta o p_i para as pontuações z :

$$Z_i = \frac{p_i - \bar{p}}{\sigma p_i}$$

A seguir, um intervalo móvel com tamanho 2 é usado para avaliar a variação nas pontuações z e calcular Sigma Z (σ_z).

$$\sigma_z = \frac{\overline{AM}}{1,128}$$

em que 1,128 é uma constante não viciada.

Transforme os dados de volta para a escala original:

$$p_i = \bar{p} + \sigma p_i * \sigma_z$$

Portanto, o desvio padrão de p_i é:

$$dp(p_i) = \sigma p_i * \sigma_z$$

Os limites de controle e a linha central são calculados como:

$$\text{Linha central} = \bar{p}$$

$$\text{LSC} = \bar{p} + 3 * dp(p_i)$$

$$\text{LIC} = \bar{p} - 3 * dp(p_i)$$

Carta U' de Laney

Permita que

X_i = número de defeituosos no subgrupo

n_i = tamanho de subgrupo para o subgrupo i

u_i = proporção de defeituosos para o subgrupo i

$$\bar{u} = \frac{\sum X_i}{\sum n_i}$$

$$\sigma u_i = \sqrt{\frac{\bar{u} * (1 - \bar{u})}{n_i}}$$

Primeiramente, converta o p_i para as pontuações z :

$$Z_i = \frac{u_i - \bar{u}}{\sigma u_i}$$

A seguir, um intervalo móvel com tamanho 2 é usado para avaliar a variação nas pontuações z e calcular Sigma Z ($\hat{\sigma}_z$).

$$\sigma_z = \frac{\overline{AM}}{1,128}$$

em que 1,128 é uma constante não viciada.

Transforme os dados de volta para a escala original:

$$u_i = \bar{u} + \sigma u * \sigma z$$

Portanto, o desvio padrão de p_i é:

$$dp(u_i) = \sigma u_i * \sigma z$$

Os limites de controle e a linha central são calculados como:

$$\text{Linha central} = \bar{u}$$

$$\text{LSC} = \bar{u} + 3 * dp(u_i)$$

$$\text{LIC} = \bar{u} - 3 * dp(u_i)$$