

# 계수형 관리도

## 개요

관리도는 공정을 정기적으로 모니터링하여 공정이 관리 상태에 있는지 여부를 확인하기 위해 사용됩니다. 연속형 데이터를 사용하여 제품이나 서비스의 품질을 측정할 수 없는 경우에는 종종 계수형 데이터를 수집하여 품질을 평가합니다. Minitab 보조 도구에는 계수형 데이터를 사용하여 공정을 모니터링하기 위해 널리 사용되는 두 관리도가 포함되어 있습니다.

- P 관리도: 제품 또는 서비스가 불량 또는 불량인 것으로 규정될 때 사용됩니다. P 관리도는 부분군당 불량품 비율을 그래프로 표시합니다. 수집되는 데이터는 각 부분군의 불량품 수이며, 비율 모수(p)를 알 수 없는 이항 분포를 따르는 것으로 가정합니다.
- U 관리도: 제품 또는 서비스에 여러 개의 결점이 있을 수 있고 결점의 수가 집계될 때 사용됩니다. U 관리도는 단위당 결점 수를 그래프로 표시합니다. 수집되는 데이터는 각 부분군의 총 결점 수이며, 부분군당 평균 결점 수를 알 수 없는 포아송 분포를 따르는 것으로 가정합니다.

관리도의 관리 한계는 일반적으로 Six Sigma 프로젝트의 관리 단계에서 설정됩니다. 특수 원인이 존재할 때 신속하게 신호를 보낼 수 있을 만큼 충분히 민감한 관리도가 좋은 관리도입니다. 이 민감도는 특수 원인에 대한 신호를 보내는 데 필요한 평균 부분군 수를 계산하여 평가할 수 있습니다. 좋은 관리도는 또한 공정이 관리 상태에 있을 때 "잘못된 경고"를 보내는 일이 없어야 합니다. 잘못된 경고 비율은 공정이 관리 상태에 있을 때 "관리가탈" 상태에 있는 것으로 간주되는 부분군의 비율을 계산하여 평가할 수 있습니다.

관리도의 수행 상태를 평가하는 데 도움이 되도록 보조 도구 보고서 카드는 다음과 같은 데이터 검사를 자동으로 수행합니다.

- 안정성
- 부분군 수
- 부분군 크기
- 기대 변동

이 문서에서는 이러한 조건이 달라질 때 계수형 관리도가 어떻게 동작하는지 조사하고 해당 조건에 대한 요구 사항을 평가하기 위해 어떠한 가이드라인을 설정했는지 설명합니다.

또한 데이터에서 관측된 변동이 기대 변동과 일치하지 않고 Minitab에서 과대산포 또는 과소산포를 탐지하는 경우 권장되는 Laney P' 및 U' 관리도에 대해서도 설명합니다.

참고 P 관리도와 U 관리도는 확인할 수 없거나 확인하기 어려운 추가 가정을 따릅니다. 자세한 내용은 부록 A를 참조하십시오.

# 데이터 검사

## 안정성

계수형 관리도의 경우 네 가지 검정을 수행하여 공정의 안정성을 평가할 수 있습니다. 이 검정을 동시에 사용할 경우 관리도의 민감도가 증가합니다. 그러나 관리도에 검정이 추가될수록 잘못된 경고 비율이 증가하기 때문에 각 검정의 목적 및 추가된 값을 확인하는 것이 중요합니다.

### 목적

Minitab에서는 네 가지 안정성 검정 중 계수형 관리도와 함께 보조 도구에 포함시킬 검정을 결정하고자 했습니다. 목표는 잘못된 경고 비율을 유의하게 높이지 않고 관리 이탈 조건에 대한 민감도를 유의하게 증가시키는 검정을 식별하는 것이었습니다.

### 방법

계수형 관리도에 대한 네 가지 안정성 검정은 계량형 관리도의 특수 원인에 대한 검정 1-4에 해당합니다. 부분군 크기가 적절한 경우 불량품 비율(P 관리도) 또는 단위당 결점 수(U 관리도)가 정규 분포를 따릅니다. 그 결과, 역시 정규 분포를 바탕으로 하는 계량형 관리도 시뮬레이션에서 검정의 민감도 및 잘못된 경고 비율에 대해 동일한 결과를 생성합니다. 따라서 Minitab에서는 네 가지 안정성 검정이 계수형 관리도의 민감도 및 잘못된 경고 비율에 어떤 영향을 미치는지 확인하기 위해 시뮬레이션을 수행하고 계량형 관리도에 대한 문헌을 검토했습니다. 또한 검정과 연관된 특수 원인의 출현율을 조사했습니다. 각 검정에 사용된 방법에 대한 자세한 내용은 아래 결과 항목과 부록 B를 참조하십시오.

### 결과

계수형 관리도의 안정성을 평가하기 위해 사용되는 네 가지 검정 중 검정 1과 2가 가장 유용하다는 것을 확인했습니다.

#### 검정 1: 관리 한계를 벗어난 점을 식별

검정 1은 중심선으로부터 3 표준 편차 밖에 있는 점들을 식별합니다. 검정 1은 보편적으로 관리 이탈 상황을 탐지하는 데 필요한 것으로 간주됩니다. 검정 1의 잘못된 경고 비율은 0.27%에 불과합니다.

#### 검정 2: 불량품 비율(P 관리도) 또는 단위당 평균 결점 수(U 관리도)의 이동을 식별합니다.

검정 2는 9개의 연속된 점이 중심선으로부터 같은 쪽에 있을 때 신호를 보냅니다. Minitab에서는 불량품 비율(P 관리도) 또는 단위당 평균 결점 수(U 관리도)의 이동에 대한 신호를 탐지하는 데 필요한 부분군의 수를 결정하기 위해 시뮬레이션을 수행했습니다. 검정 2를 추가하면 관리도의 민감도가 유의하게 증가하여 불량품 비율 또는 단위당 평균 결점 수의 작은 이동을 탐지할 수 있다는 것을 알았습니다. 검정 1과 검정 2를 함께 사용할 경우 검정 1만 사용할 경우에 비해 훨씬 더 적은 수의 부분군으로 작은 이동을 탐지할 수 있습니다. 따라서 검정 2를 추가하면 일반적인 관리 이탈 상황을 탐지하는 데 도움이 되며 약간의 잘못된 경고 비율 증가를 허용할 수 있을 만큼 민감도가 증가합니다.

## 보조 도구에 포함되지 않은 검정



검정 3: K개의 연속된 점이 모두 상승 또는 하락

검정 3은 불량품의 비율 또는 단위당 평균 결점 수의 표류를 탐지하기 위해 설계되었습니다(Davis and Woodall, 1988). 그러나 검정 1 및 검정 2 외에 검정 3을 사용해도 관리도의 민감도가 유의하게 증가하지 않습니다. 이미 시뮬레이션 결과를 기반으로 검정 1과 검정 2를 사용하기로 결정했기 때문에 검정 3을 포함시켜도 관리도에 유의한 값이 추가되지 않습니다.

검정 4: K개의 연속된 점이 교대로 상승 또는 하락

실제로 이 패턴이 발생할 수 있지만 특정한 하나의 패턴에 대한 검정 대신 비정상적인 추세나 패턴을 찾아보는 것이 좋습니다.

따라서 보조 도구에서는 검정 1과 검정 2만 사용하여 계수형 관리도의 안정성을 검사하고 보고서 카드에 다음과 같은 상태를 표시합니다.

상태	조건
	관리도에 검정 1 또는 검정 2 실패가 없음.
	위의 조건이 유지되지 않는 경우.

## 부분군 수

관리 한계에 대해 알려진 값이 없을 경우 데이터로부터 추정해야 합니다. 정밀한 한계 추정치를 얻기 위해서는 충분한 데이터가 있어야 합니다. 데이터가 불충분한 경우 표본 추출 변동성으로 인해 한계 추정치가 “참” 한계와 거리가 멀 수도 있습니다. 부분군의 수를 늘리면 한계의 정밀도를 개선할 수 있습니다.

### 목적

Minitab에서는 P 관리도 및 U 관리도에 대한 정밀한 관리 한계를 얻는 데 필요한 부분군의 수를 조사했습니다. 목표는 검정 1로 인한 잘못된 경고 비율이 95% 신뢰 수준에서 2%를 넘지 않도록 하는 데 필요한 부분군의 수를 결정하는 것이었습니다. 중심선의 추정치가 관리 한계의 추정치보다 더 정밀하기 때문에 부분군 수가 중심선에 미치는 영향(검정 2)은 평가하지 않았습니다.

### 방법

부분군 크기가 적절하고 표본 추출 변동성으로 인한 오차가 없을 경우 관리 상한 위에 있는 점의 백분율은 0.135%입니다. 부분군의 수가 적절한지 여부를 확인하기 위해 Minitab에서는 Trietsch(1999)에 요약된 방법에 따라 관리 상한 위에 있는 점으로 인한 잘못된 경고 비율이 95% 신뢰 수준에서 1%를 넘지 않도록 유지했습니다. 관리 한계의 대칭성으로 인해 이 방법을 사용할 경우 검정 1의 잘못된 경고 비율이 2%가 됩니다. 자세한 내용은 부록 C를 참조하십시오.

## 결과

### P 관리도

P 관리도에서 다양한 부분군 크기(n) 및 비율( $\bar{p}$ )을 바탕으로, 검정 1로 인한 잘못된 경고 비율이 2%를 초과하지 않도록 하는 데 필요한 부분군의 수(m)가 아래 나와 있습니다.



부분군 크기 (n)	$\bar{p}$				
	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1
10	1881	421	228	60	35
50	425	109	64	23	16
100	232	65	41	17	13
150	165	49	32	14	11
200	131	41	27	13	10
500	65	24	18	10	9

### U 관리도

U 관리도에서 부분군당 평균 결점 수 값( $\bar{c}$ )에 대해 검정 1로 인한 잘못된 경고 비율이 2%를 초과하지 않도록 하는 데 필요한 부분군의 수(m)가 아래 나와 있습니다.

$\bar{c}$	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	3.0	5.0	10.0	30.0	50.0
부분군 수	232	95	65	52	41	22	18	14	10	9

이러한 결과를 바탕으로, 계수형 관리도에서 부분군의 수를 확인할 때 보조 도구 보고서 카드에는 다음과 같은 상태가 표시됩니다.

상태	조건
	부분군의 수 $\geq$ 필요한 수. 부분군의 수가 95% 신뢰 수준에서 검정 1로 인한 잘못된 경고 비율이 2%를 초과하지 않도록 충분히 큼니다.
	위의 조건이 유지되지 않는 경우.

## 부분군 크기

정규 분포를 사용하여 불량품 비율( $\hat{p}$ )의 분포(P 관리도) 및 단위당 결점 수( $\hat{u}$ )의 분포(U 관리도)를 근사화할 수 있습니다. 부분군 크기가 증가하면 이 근사의 정확도가 증가합니다. 각 관리도에 사용되는 검정의 기준이 정규 분포를 바탕으로 하기 때문에, 더 나은 정규 근사를 얻기 위해 부분군 크기를 늘리면 관리 이탈 상태를 정확하게 식별하는 관리도의

능력이 개선되고 잘못된 경고 비율이 감소합니다. 불량품의 비율 또는 단위당 결점 수가 낮은 경우 부분군의 크기가 커야 정확한 결과를 얻을 수 있습니다.

## 목적

Minitab에서는 정규 근사가 P 관리도 및 U 관리도를 위해 정확한 결과를 얻기에 충분히 적절하도록 보장하기 위해 필요한 부분군 크기를 조사했습니다.

## 방법



Minitab에서는 다양한 부분군 크기 및 P 관리도의 경우 다양한 비율(p), U 관리도의 경우 다양한 부분군당 평균 결점 수(c)에 대한 잘못된 경고 비율을 평가하기 위해 시뮬레이션을 수행했습니다. 부분군 크기가 적절한 정규 근사, 즉 충분히 낮은 잘못된 경고 비율을 얻기에 충분히 큰지 여부를 확인하기 위해 정규 가정 하의 예상된 잘못된 경고 비율(검정 1의 경우 0.27%, 검정 2의 경우 0.39%)과 결과를 비교했습니다. 자세한 내용은 부록 D를 참조하십시오.

## 결과

### P 관리도

Minitab의 조사에 따르면 P 관리도의 경우 필요한 부분군 크기는 불량품 비율(p)에 따라 다릅니다. p의 값이 작을수록 필요한 부분군 크기(n)가 더 커집니다. 곱 np가 0.5보다 크거나 같은 경우 검정 1과 검정 2에 대해 결합된 잘못된 경고 비율은 약 2.5% 미만입니다. 그러나 곱 np가 0.5보다 작은 경우 검정 1과 검정 2에 대해 결합된 잘못된 경고 비율이 훨씬 높아 10%를 초과하는 수준에 도달할 수 있습니다. 따라서 이 기준을 바탕으로 np의 값  $\geq 0.5$ 인 경우 P 관리도의 성능이 적절합니다.



P 관리도에 대해 부분군 크기를 확인하는 경우 보조 도구의 보고서 카드에는 다음과 같은 상태가 표시됩니다.

상태	조건
	$n_i \bar{p} \geq 0.5$ 모든 i에 대해 설명 $n_i$ = i번째 부분군의 부분군 크기 $\bar{p}$ = 불량품의 평균 비율
	위의 조건이 유지되지 않는 경우.

### U 관리도

Minitab의 조사에 따르면 U 관리도의 경우 필요한 부분군 크기는 부분군당 결점 수(c), 즉 부분군 크기(n) 곱하기 단위당 결점 수(u)에 따라 다릅니다. 잘못된 경고의 비율은 결점 수 c가 작을 때 가장 높습니다.  $c = nu$ 가 0.5보다 크거나 같은 경우 검정 1과 검정 2에 대해 결합된 잘못된 경고 비율은 약 2.5% 미만입니다. 그러나 c 값이 0.5보다 작은 경우 검정 1과 검정 2에 대해 결합된 잘못된 경고 비율이 훨씬 높아 10%를 초과하는 수준에 도달할 수 있습니다. 따라서 이 기준을 바탕으로  $c = nu$ 의 값  $\geq 0.5$ 인 경우 U 관리도의 성능이 적절합니다.

U 관리도에 대해 부분군 크기를 확인하는 경우 보조 도구의 보고서 카드에는 다음과 같은 상태가 표시됩니다.

상태	조건
	$n_i \bar{u} \geq 0.5$ 모든 $i$ 에 대해 설명 $n_i$ = $i$ 번째 부분군의 부분군 크기 $\bar{u}$ = 단위당 평균 결점 수
	위의 조건이 유지되지 않는 경우.

## 기대 변동

기존 P 관리도 및 U 관리도에서는 데이터 변동이 불량품의 경우 이항 분포, 결점의 경우 포아송 분포를 따른다고 가정합니다. 관리도에서는 또한 불량품의 비율 또는 결점 수가 시간이 지남에 따라 일정하게 유지된다고 가정합니다. 데이터 변동이 기대 변동보다 크거나 작은 경우 데이터에 과대산포나 과소산포가 있고 관리도가 예상대로 수행되지 않을 수 있습니다.

### 과대산포

데이터의 변동이 기대 변동보다 큰 경우 과대산포가 존재합니다. 일반적으로, 시간이 지남에 따라 불량품의 비율 또는 결점 수에 특수 원인이 아닌 외부 잡음 요인에 의해 야기되는 일부 변동이 존재합니다. 이들 관리도가 사용되는 대부분의 경우, 부분군 통계량의 표본 추출 변동이 기본 불량품의 비율 또는 결점 수의 변동을 인식할 수 없을 정도로 충분히 큼니다. 그러나 부분군 크기가 증가함에 따라 표본 추출 변동이 점점 더 작아지고 특정 시점이 되면 기본 결점 비율의 변동이 표본 추출 변동보다 커질 수 있습니다. 그 결과 관리도의 관리 한계가 극히 좁아지고 잘못된 경고 비율이 매우 높아집니다.

### 과소산포

데이터의 변동이 기대 변동보다 작은 경우 과소산포가 존재합니다. 과소산포는 인접한 부분군이 서로 상관되어 있을 때 발생할 수 있으며, 자기 상관으로도 알려져 있습니다. 예를 들어, 도구가 마모됨에 따라 결점의 수가 증가할 수도 있습니다. 부분군에 걸쳐 결점 수가 증가하면 부분군이 우연한 경우보다 더 비슷해질 수 있습니다. 데이터가 과소산포를 보이는 경우 기존 P 관리도 또는 U 관리도의 관리 한계가 너무 넓을 수도 있습니다. 관리 한계가 너무 넓으면 관리도가 거의 신호를 보내지 않습니다. 즉, 특수 원인 변동을 간과하고 일반 원인 변동으로 잘못 간주할 수 있습니다.

과대산포 또는 과소산포가 심한 경우에는 Laney P' 또는 U' 관리도를 사용하는 것이 좋습니다. 자세한 내용은 아래 Laney P' 및 U' 관리도를 참조하십시오.

## 목적

Minitab에서는 데이터에서 과대산포나 과소산포를 탐지할 수 있는 방법을 확인하고자 했습니다.

## 방법

Minitab에서는 문헌을 검색하여 과대산포 및 과소산포를 탐지할 수 있는 여러 방법을 찾았습니다. 그 결과 Jones and Govindaraju(2001)에서 찾은 진단 방법을 선택했습니다. 이 방법은 데이터를 이항 분포(불량품 데이터) 또는 포아송 분포(결점 데이터)에서 추출한 경우 확률도를 사용하여 기대되는 변동량을 확인합니다. 그런 다음 기대되는 변동량과 관측된 변동량을 비교합니다. 진단 방법에 대한 자세한 내용은 부록 E를 참조하십시오.

과대산포 검사의 일환으로, Minitab에서는 또한 기존 P 및 U 관리도에서 관리 한계 밖에 있는 점의 수를 확인합니다. 과대산포의 문제는 높은 잘못된 경고 비율이기 때문에, 관리 이탈 상태에 있는 점의 비율이 낮은 경우 과대산포가 문제일 가능성은 없습니다.

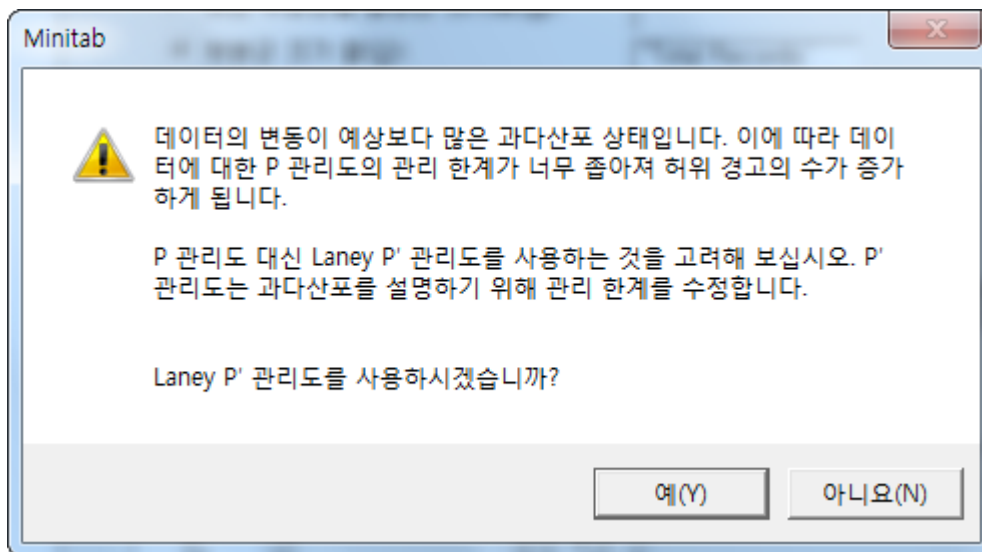
## 결과

Minitab에서는 관리도가 표시되기 전에 사용자가 P 또는 U 관리도의 대화 상자에서 확인을 선택한 후 과대산포 및 과소산포에 대한 진단 검사를 수행합니다.

다음과 같은 조건이 충족되는 경우 과대산포가 존재합니다.

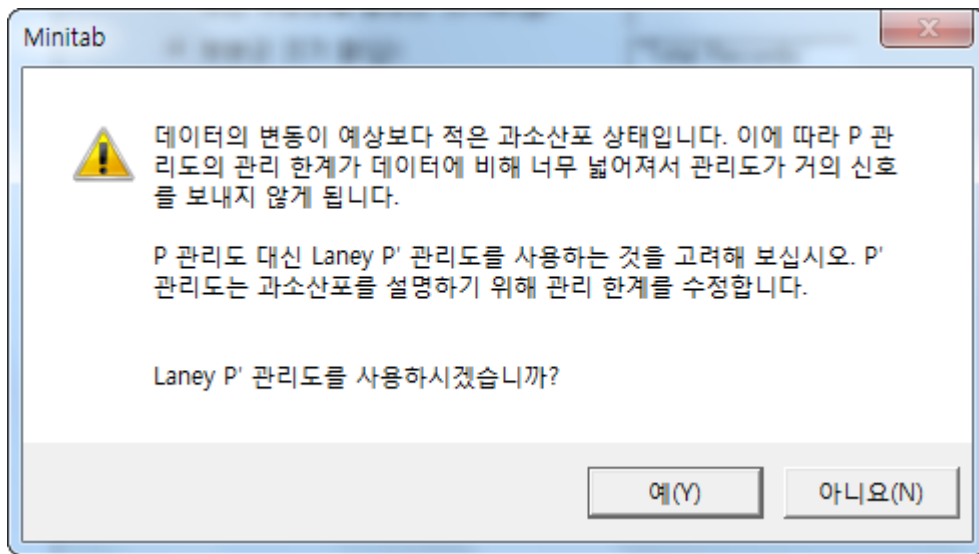
- 관측된 변동 대 기대 변동의 비율이 130%보다 큼.
- 관리 한계를 벗어난 점이 2%를 초과함.
- 관리 한계를 벗어난 점의 수가 1보다 큼.

과대산포가 탐지되면 Laney P' 또는 U' 관리도를 표시할 것인지 묻는 메시지가 표시됩니다. P' 관리도에 대한 메시지가 아래 표시되어 있습니다.







관측된 변동 대 기대 변동의 비율이 75%보다 작은 경우 과소산포가 존재합니다. 과소산포가 탐지되면 Laney P' 또는 U' 관리도를 표시할 것인지 묻는 메시지가 표시됩니다. P' 관리도에 대한 메시지가 아래 표시되어 있습니다.



Laney 관리도를 사용할 경우 요약 보고서에 Laney 관리도가 표시됩니다. Laney 관리도를 사용하지 않을 경우 요약 보고서에 P 또는 U 관리도가 표시됩니다. 그러나 진단 보고서에는 기존 관리도와 Laney 관리도가 모두 표시됩니다. 두 관리도를 모두 표시하면 기존 P 또는 U 관리도에서 과대산포 또는 과소산포의 영향을 확인하고 Laney 관리도가 데이터에 보다 적절한지 여부를 결정할 수 있습니다.

또한 과대산포 또는 과소산포를 확인하는 경우 보조 도구의 보고서 카드에는 다음과 같은 상태가 표시됩니다.

상태	조건
	산포 비율 > 130%, 관리 한계를 벗어난 점이 2% 미만이거나 관리 한계를 벗어난 점의 수 = 1 산포 비율 > 75% 및 <= 130% 산포 비율 > 130%, 관리 한계를 벗어난 점이 2%를 초과하고 관리 한계를 벗어난 점의 수 > 1이며 Laney P' 또는 U'를 사용하기로 선택함 산포 비율 < 75%이고 Laney P' 또는 U'를 사용하기로 선택함 설명 산포 비율 = $100 * (\text{관측된 변동}) / (\text{기대 변동})$
	산포 비율 > 130%, 관리 한계를 벗어난 점이 2%를 초과하고 관리 한계를 벗어난 점의 수 > 1이며 Laney P' 또는 U'를 사용하기로 선택하지 않음 산포 비율 < 75%이고 Laney P' 또는 U'를 사용하기로 선택하지 않음

# Laney P' 및 U' 관리도

기존 P 관리도 및 U 관리도에서는 데이터의 변동이 불량품 데이터의 경우 이항 분포, 결점 데이터의 경우 포아송 분포를 따른다고 가정합니다. 관리도에서는 또한 불량품의 비율 또는 결점 수가 시간이 지남에 따라 일정하게 유지된다고 가정합니다. Minitab에서는 데이터의 변동이 기대 변동보다 크거나 작은지, 즉 데이터에 과대산포나 과소산포가 있는지 여부를 확인하기 위해 검사를 수행합니다. 위의 기대 변동 데이터 검사를 참조하십시오.

데이터에 과대산포나 과소산포가 존재하는 경우 기존 P 및 U 관리도가 예상대로 수행되지 않을 수도 있습니다. 과대산포가 있으면 관리 한계가 너무 좁아지므로 잘못된 경고 비율이 높아질 수 있습니다. 과소산포가 있으면 관리 한계가 너무 넓어져서 특수 원인 변동을 간과하고 일반 원인 변동으로 잘못 간주할 수 있습니다.

## 목적

Minitab의 목적은 데이터에서 과대산포나 과소산포가 탐지될 때 기존 P 및 U 관리도에 대한 대안을 식별하는 것이었습니다.

## 방법

Minitab에서는 문헌을 검토하여 과대산포 및 과소산포를 처리하기 위한 가장 좋은 방법이 Laney P' 및 U' 관리도(Laney, 2002)라는 것을 알았습니다. Laney 방법에서는 일반 원인 변동의 수정된 정의를 사용하며, 이 정의에서는 너무 좁거나(과대산포) 너무 넓은(과소산포) 관리 한계를 수정합니다.

Laney 관리도에서 일반 원인 변동에는 일반적인 단기 군내 변동이 포함되며 연속된 부분군 간의 평균 단기 변동도 포함됩니다. Laney 관리도의 일반 원인 변동은 데이터를 정규화하고 인접한 부분군의 평균 이동 범위(Laney 관리도에서는 시그마 Z라고 함)를 계산하여 표준 P 또는 U 관리 한계를 조정하여 계산됩니다. 연속된 부분군 간의 변동을 포함하면 여러 부분군에 걸쳐 데이터의 변동이 기본 결점 비율의 변동 또는 데이터 내 랜덤성의 부족으로 인해 기대 변동보다 크거나 작은 경우 영향을 수정하는 데 도움이 됩니다.

시그마 Z를 계산한 후에는 데이터가 원래 단위로 다시 변환됩니다. 원래 데이터 단위를 사용하면 부분군 크기가 같지 않은 경우 관리 한계가 기존 P 및 U 관리도에서처럼 달라질 수 있기 때문에 유용합니다. Laney P' 및 U' 관리도에 대한 자세한 내용은 부록 F를 참조하십시오.

## 결과

Minitab에서는 과대산포나 과소산포에 대한 검사를 수행하고 과대산포나 과소산포가 탐지되지만 Laney P' 또는 U' 관리도를 권장합니다.

# 참고 문헌

- AIAG (1995). Statistical process control (SPC) reference manual. Automotive Industry Action Group.
- Bischak, D.P., & Trietsch, D. (2007). The rate of false signals in  $\bar{X}$  control charts with estimated limits. *Journal of Quality Technology*, 39, 55-65.
- Bowerman, B.L., & O'Connell, R.T. (1979). *Forecasting and time series: An applied approach*. Belmont, CA: Duxbury Press.
- Chan, L. K., Hapuarachchi K. P., & Macpherson, B.D. (1988). Robustness of  $\bar{X}$  and R charts. *IEEE Transactions on Reliability*, 37, 117-123.
- Davis, R.B., & Woodall, W.H. (1988). Performance of the control chart trend rule under linear shift. *Journal of Quality Technology*, 20, 260-262.
- Jones, G., & Govindaraju, K. (2001). A Graphical Method for Checking Attribute Control Chart Assumptions, *Quality Engineering*, 13(1), 19-26.
- Laney, D. (2002). Improved Control Charts for Attributes. *Quality Engineering*, 14(4), 531-537.
- Montgomery, D.C. (2001). *Introduction to statistical quality control*, 4<sup>th</sup> edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Schilling, E.G., & Nelson, P.R. (1976). The effect of non-normality on the control limits of  $\bar{X}$  charts. *Journal of Quality Technology*, 8, 183-188.
- Trietsch, D. (1999). *Statistical quality control: A loss minimization approach*. Singapore: World Scientific Publishing Co.
- Wheeler, D.J. (2004). *Advanced topics in statistical process control. The power of Shewhart's charts*, 2<sup>nd</sup> edition. Knoxville, TN: SPC Press.
- Yourstone, S.A., & Zimmer, W.J. (1992). Non-normality and the design of control charts for averages. *Decision Sciences*, 23, 1099-1113.

# 부록 A: 계수형 관리도에 대한 추가 가정

P 관리도와 U 관리도에는 데이터 검사에 의해 평가되지 않는 추가 가정이 필요합니다.

P 관리도	U 관리도
<ul style="list-style-type: none"><li>• 데이터가 <math>n</math>개의 고유 항목으로 구성되고 각 항목이 불량 또는 불량인 것으로 분류되는 경우.</li><li>• 부분군 내 각 항목에 대해 한 항목이 불량일 확률은 같습니다.</li><li>• 항목이 불량일 우도는 이전 항목이 불량인지 여부의 영향을 받지 않습니다.</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• 카운트는 이산형 사건의 카운트입니다.</li><li>• 이산형 사건은 공간, 시간 또는 제품의 올바른 일부 유한 영역 내에서 발생합니다.</li><li>• 사건은 서로 독립적으로 발생하며 이벤트의 우도는 기회 영역의 크기에 비례합니다.</li></ul>

각 관리도에 대해 처음 두 가정은 데이터 수집 과정에 포함되어 있으며, 데이터 자체는 이러한 가정이 충족되는지 여부를 확인하기 위해 사용할 수 없습니다. 세 번째 가정은 보조 도구에서 수행되지 않은 데이터의 상세 분석 및 고급 분석을 통해서만 확인할 수 있습니다.

# 부록 B: 안정성

## 시뮬레이션 B1: 검정 2를 검정 1에 추가할 경우 민감도에 미치는 영향

검정 1은 한 점이 중심선으로부터 3 표준 편차 범위 밖에 있을 때 신호를 보내 관리 이탈 상태에 있는 점을 탐지합니다. 검정 2는 9개의 연속된 점이 중심선으로부터 같은 쪽에 있을 때 신호를 보내 불량품의 비율 또는 단위당 결점 수의 이동을 탐지합니다.

Minitab에서는 검정 2를 검정 1과 함께 사용하면 계수형 관리도의 민감도가 개선되는지 여부를 확인하기 위해 P 관리도의 경우 정규( $p$ ,  $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ ) 분포( $p$ 는 불량품의 비율이고  $n$ 은 부분군 크기임), U 관리도의 경우 정규( $u$ ,  $\sqrt{u}$ ) 분포( $u$ 는 단위당 평균 결점 수임)를 바탕으로 관리 한계를 설정했습니다. 각 분포의 위치( $p$  또는  $u$ )를 표준 편차(SD)의 배수 단위로 이동한 후 10,000번의 각 반복 횟수에 대한 신호를 탐지하기 위해 필요한 부분군의 수를 기록했습니다.

결과는 표 1에 나와 있습니다.

표 1 검정 1 실패(검정 1), 검정 2 실패(검정 2) 또는 검정 1 및 검정 2 실패(검정 1 또는 2)까지 평균 부분군의 수. 이동은 표준 편차(SD)의 배수와 같습니다.

이동	검정 1	검정 2	검정 1 또는 2
0.5 SD	154	84	57
1 SD	44	24	17
1.5 SD	15	13	9
2 SD	6	10	5

표에서 보듯이 두 검정 모두 사용하는 경우(검정 1 또는 2 열) 검정 1만 사용하는 경우 0.5 표준 편차 이동을 탐지하기 위해 필요한 평균 154개의 부분군에 비해 위치의 0.5 표준 편차 이동을 탐지하기 위해 평균 57개의 부분군이 필요합니다. 따라서 두 검정을 모두 사용하면 민감도가 유의하게 증가하여 불량품의 비율 또는 단위당 평균 결점 수의 작은 이동을 탐지할 수 있습니다. 그러나 이동 크기가 증가하는 경우에는 검정 2를 추가해도 민감도가 유의하게 증가하지 않습니다.

# 부록 C: 부분군의 수

## 공식 C1: 관리 상한에 대한 95% CI를 기준으로 P 관리도에 필요한 부분군의 수

부분군의 수가 잘못된 경고 비율을 낮게 유지하기에 충분한지 확인하기 위해 Minitab에서는 Bischak(1999)을 따라 95% 신뢰 수준에서 검정 1로 인한 잘못된 경고 비율이 2%를 넘지 않도록 하는 데 필요한 부분군의 수를 결정합니다.

먼저, 다음과 같은  $p_c$ 를 찾습니다.

$$p_c + 3 \sqrt{\frac{p_c(1-p_c)}{n}} = \bar{p} + z_{0.99} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

설명

$p_c$  = 관리 상한 위 1%의 잘못된 경고 비율을 생성하는 비율.  $\bar{p}$ 은(는)  $p$ 의 참 값으로 가정합니다. 관리 한계의 대칭성으로 인해 잘못된 경고의 전체 비율은 관리 상한과 하한을 모두 고려할 때 2%가 됩니다.

$n$  = 부분군 크기(부분군 크기가 변동하는 경우 평균 부분군 크기가 사용됩니다.)

$\bar{p}$  = 불량품의 평균 비율

$z_p$  = 평균=0이고 표준 편차=1인 정규 분포의 경우  $p$ 에서 평가된 역 cdf

부분군의 수를 확인하기 위해 Minitab에서는 관리 상한에 대한 95% 신뢰 하한을 계산하고  $p_c$ (으)로 설정하고

$$p_c = \bar{p} - z_{0.95} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{nm}}$$

$m$ 을 계산하여 다음과 같은 결과를 얻습니다.

$$m = \frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n \left( \frac{\bar{p}-p_c}{z_{0.95}} \right)^2}$$

이 공식을 사용하여 표 2에 표시된 대로 다양한 비율 및 부분군 크기에 대해 95% 신뢰 수준에서 관리 상한 위 잘못된 경고 비율을 1% 미만으로 유지하는 데 필요한 부분군의 수를 확인할 수 있습니다. 관리 한계의 대칭성으로 인해 이 숫자는 P 관리도에서 검정 1로 인한 잘못된 경고의 전체 비율을 95% 신뢰 수준에서 2% 미만으로 유지하는 데 필요한 부분군의 수와 같습니다.

표 2 다양한 부분군 크기( $n$ ) 및 비율( $\bar{p}$ )에 대한 부분군의 수( $m$ )

	$\bar{p}$				
부분군 크기( $n$ )	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1
10	1881	421	228	60	35

50	425	109	64	23	16
100	232	65	41	17	13
150	165	49	32	14	11
200	131	41	27	13	10
500	65	24	18	10	9

참고 계량형 관리도의 경우 검정 1로 인한 잘못된 경고의 전체 비율을 1%로 제한했습니다. 계수형 관리도의 경우 실제적인 이유로 이 기준을 2%로 완화했습니다. 많은 경우, 표 2에 표시된 대로 P 관리도의 불량품 비율은 작기 때문에 이에 따라 정밀도를 얻기 위해서는 아주 큰 부분군의 크기가 필요합니다.

## 공식 C2: 관리 상한에 대한 95% CI를 기준으로 U 관리도에 필요한 부분군의 수

Minitab에서는 위의 P 관리도에 대해 설명된 것과 같은 방법을 사용했습니다. Trietsch(1999)에 따라 95% 신뢰 수준에서 검정 1로 인한 잘못된 경고의 전체 비율을 2% 이하로 유지하는 데 필요한 부분군의 수를 결정합니다.

먼저, 다음과 같은  $c_c$ 를 찾습니다.

$$c_c + 3\sqrt{c_c} = \bar{c} + z_{0.99}\sqrt{\bar{c}}$$

설명

$c_c$  = 관리 상한 위 1%의 잘못된 경고 비율을 생성하는 부분군당 평균 결점 수.  $\bar{c}$ 는  $c$ 의 참값으로 가정합니다. 관리 한계의 대칭성으로 인해 상한과 하한을 결합할 때 검정 1로 인한 잘못된 경고의 전체 비율은 2%가 됩니다.

$\bar{c}$  = 부분군당 평균 결점 수(부분군 크기가 변동하는 경우 평균 부분군 크기가 사용됩니다.)

$z_p$  = 평균=0이고 표준 편차=1인 정규 분포의 경우 p에서 평가된 역 cdf

부분군의 수를 확인하기 위해 Minitab에서는 관리 상한에 대한 95% 신뢰 하한을 계산하고  $c_c$ 로 설정한 후

$$c_c = \bar{c} - z_{0.95} \sqrt{\frac{\bar{c}}{m}}$$

m을 계산하여 다음과 같은 결과를 얻습니다.

$$m = \frac{\bar{c}}{\left(\frac{\bar{c} - c_c}{z_{0.95}}\right)^2}$$

결과는 표 1에 나와 있습니다.

표 3 다양한 부분군당 평균 결점 수( $\bar{c}$ )에 대한 부분군의 수(m)

$\bar{c}$	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	3.0	5.0	10.0	30.0	50.0
부분군 수	232	95	65	52	41	22	18	14	10	9

참고 계량형 관리도의 경우 검정 1로 인한 잘못된 경고 비율을 1%로 제한했습니다. 계수형 관리도의 경우 실제적인 이유로 이 기준을 2%로 완화했습니다. 많은 경우, 표 3에 표시된 대로 부분군당 결점 수는 작기 때문에 이에 따라 정밀도를 얻기 위해서는 아주 큰 부분군의 크기가 필요합니다.



# 부록 D: 부분군 크기

중심 극한 정리에 따르면 정규 분포는 동일하게 분포된 독립적인 랜덤 변수의 평균 분포를 근사할 수 있습니다. P 관리도의 경우  $\hat{p}$ (부분군 비율)는 동일하게 분포된 독립적인 Bernoulli 랜덤 변수의 평균입니다. U 관리도의 경우  $\hat{u}$ (부분군 비율)는 동일하게 분포된 독립적인 포아송 랜덤 변수의 평균입니다. 따라서 두 가지 경우 모두 정규 분포를 근사로 사용할 수 있습니다.

근사의 정확도는 부분군 크기가 증가함에 따라 증가합니다. 근사는 또한 불량품의 비율이 증가하거나(P 관리도) 단위당 결점 수가 증가하면(U 관리도) 개선됩니다. 부분군 크기가 작거나 p(P 관리도) 또는 u(U 관리도) 값이 작은 경우  $\hat{p}$  및  $\hat{u}$ 의 분포는 오른쪽으로 치우치며 잘못된 경고 비율이 증가합니다. 따라서 잘못된 경고 비율을 보고 정규 근사의 정확도를 평가할 수 있으며, 적절한 정규 근사를 얻는 데 필요한 최소 부분군 크기를 결정할 수 있습니다.

이를 위해 Minitab에서는 시뮬레이션을 수행하여 P 관리도 및 U 관리도의 다양한 부분군 크기에 대해 잘못된 경고 비율을 평가하고 그 결과를 정규 가정 하에 예상되는 잘못된 경고 비율(검정 1의 경우 0.27%, 검정 2의 경우 0.39%)과 비교했습니다.

## 시뮬레이션 D1: P 관리도의 부분군 크기, 비율 및 잘못된 경고 비율 간의 관계

초기 10,000개의 부분군 집합을 사용하여 Minitab에서는 다양한 부분군 크기(n) 및 비율(p)에 대한 관리 한계를 설정했습니다. 또한 추가 2,500개 부분군에 대한 잘못된 경고의 백분율을 기록했습니다. 그런 다음 10,000번 반복을 수행하고 표 4에 표시된 대로 검정 1과 검정 2로부터 잘못된 경고의 평균 백분율을 계산했습니다.

표 4 다양한 부분군 크기(n) 및 비율(p)에 대한 검정 1, 검정 2(np)로 인한 잘못된 경고의 백분율(%)

부분군 크기(n)	p				
	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1
10	0.99, 87.37 (0.01)	4.89, 62.97 (0.05)	0.43, 40.14 (0.1)	1.15, 1.01 (0.5)	1.28, 0.42 (1)
50	4.88, 63.00 (0.05)	2.61, 10.41 (0.25)	1.38, 1.10 (0.5)	0.32, 0.49 (2.5)	0.32, 0.36 (5)
100	0.47, 40.33 (0.10)	1.41, 1.12 (0.5)	1.84, 0.49 (1)	0.43, 0.36 (5)	0.20, 0.36 (10)
150	1.01, 25.72 (0.15)	0.71, 0.43 (0.75)	0.42, 0.58 (1.5)	0.36, 0.42 (7.5)	0.20, 0.36 (15)
200	1.74, 16.43 (0.2)	1.86, 0.50 (1.00)	0.43, 0.41 (2)	0.27, 0.36 (10)	0.34, 0.36 (20)

부분군 크기(n)	p				
	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1
500	1.43, 1.12 (0.5)	0.42, 0.50 (2.5)	0.52, 0.37 (5)	0.32, 0.37 (25)	0.23, 0.36 (50)

표 4의 결과를 보면 일반적으로 비율(p)이 0.001이나 0.005와 같이 작거나 표본 크기가 작을 때(n=10) 잘못된 경고의 백분율이 가장 높다는 것을 알 수 있습니다. 따라서 잘못된 경고의 백분율은 곱 np의 값이 작을 때 가장 높고 np가 클 때 가장 낮습니다. np가 0.5보다 크거나 같은 경우 검정 1과 검정 2에 대해 결합된 잘못된 경고 비율은 약 2.5% 미만입니다. 그러나 np가 0.5보다 작은 경우 검정 1과 검정 2에 대해 결합된 잘못된 경고 비율이 훨씬 높아 10%를 초과하는 수준에 도달할 수 있습니다. 그러므로 이 기준을 바탕으로 np의 값  $\geq 0.5$ 인 경우 P 관리도의 성능이 적절합니다. 따라서 부분군 크기는  $\frac{0.5}{p}$  이상이어야 합니다.

## 시뮬레이션 D2: U 관리도의 부분군 크기, 단위당 결점 수 및 잘못된 경고 비율 간의 관계

초기 10,000개의 부분군 집합을 사용하여 Minitab에서는 다양한 부분군 크기(n) 및 단위당 결점 수(p)에 대한 관리 한계를 설정했습니다. 또한 추가 2,500개 부분군에 대한 잘못된 경고의 백분율을 기록했습니다. 그런 다음 10,000번 반복을 수행하고 표 5에 표시된 대로 검정 1과 검정 2로부터 잘못된 경고의 평균 백분율을 계산했습니다.

표 5 다양한 부분군당 결점 수(c = nu)에 대한 검정 1, 검정 2로 인한 잘못된 경고의 백분율(%)

c	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0	3.0	5.0	10.0	30.0	50
잘못된 경고 비율	0.47, 40.40	3.70, 6.67	1.44, 1.13	0.57, 0.39	0.36, 0.51	0.38, 0.40	0.54, 0.38	0.35, 0.37	0.29, 0.37	0.25, 0.37

표 5의 결과를 보면 잘못된 경고의 백분율은 부분군 크기(n)와 단위당 결점 수(u)의 곱, 즉 부분군당 결점 수(c)가 작을 때 가장 높다는 것을 알 수 있습니다. c가 0.5보다 크거나 같은 경우 검정 1과 검정 2에 대해 결합된 잘못된 경고 비율은 약 2.5% 미만입니다. 그러나 c가 0.5보다 작은 경우 검정 1과 검정 2에 대해 결합된 잘못된 경고 비율이 훨씬 높아 10%를 초과하는 수준에 도달할 수 있습니다. 그러므로 이 기준을 바탕으로  $c = nu$ 의 값  $\geq 0.5$ 인 경우 U 관리도의 성능이 적절합니다. 따라서 부분군 크기는  $\frac{0.5}{u}$  이상이어야 합니다.

# 부록 E: 과대산포/과소산포

$d_i$ 를 부분군  $i$ 의 불량품 수,  $n_i$ 를 부분군 크기로 설정하겠습니다.

먼저 불량품 수를 정규화합니다. 서로 다를 가능성이 있는 부분군 크기를 처리하기 위해 수정된 불량품 수( $adjd_i$ )를 사용합니다.

$$adjd_i = \text{부분군 } i \text{의 수정된 불량품 수} = \frac{d_i}{n_i}(\bar{n}). \text{ 설명:}$$

$$\bar{n} = \text{평균 부분군 크기}$$

$$X_i = \sin^{-1} \sqrt{\frac{adjd_i + 3/8}{\bar{n} + 0.75}}$$

정규화된 카운트( $X_i$ )의 표준 편차는  $\frac{1}{\sqrt{4*\bar{n}}}$ 가 됩니다. 즉, 2 표준 편차가  $\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$ 와 같습니다.

그런 다음, 정규화된 카운트를 데이터로 사용하여 표준 정규 확률도를 생성합니다. 회귀선은 표시 점의 중간 50%만을 사용하여 적합됩니다. 변환된 카운트 데이터의 25번째 및 75번째 백분위수를 찾고 25번째 백분위수보다 크거나 같고 75번째 백분위수보다 작거나 같은 모든  $X-Y$  쌍을 사용합니다. 이 선은  $-1$ 과  $+1$ 의  $Z$  값에 따라 예측된 변환 카운트 값을 얻기 위해 사용됩니다. 이 회귀 분석의 “ $Y$ ” 데이터는 변환된 카운트의 정규 점수이며 “ $X$ ” 데이터는 변환된 카운트입니다.

다음과 같이 관측된 변동을 계산합니다.

$Y(-1)$ 을  $Z = -1$ 에 대한 예측된 변환 카운트로 설정합니다.

$Y(+1)$ 을  $Z = +1$ 에 대한 예측된 변환 카운트로 설정합니다.

2 표준 편차의 관측된 추정치 =  $Y(+1) - Y(-1)$ .

다음과 같이 기대 변동을 계산합니다.

$$2 \text{ 표준 편차의 기대 추정치} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$$

관측된 변동 대 기대 변동의 비율을 계산하여 백분율로 변환합니다. 백분율이 130%보다 크면 점의 2%가 관리 한계를 벗어나고 관리 한계를 벗어난 점의 수가 1보다 크고 과대산포의 증거가 있습니다. 백분율이 75%보다 작으면 과소산포의 증거가 있습니다.

# 부록 F: Laney P' 및 U' 관리도

Laney P' 및 U' 관리도의 개념에는 부분군 데이터가 일정한 결점 또는 불량품의 비율로 랜덤 공정에서 추출되었을 때 부분군 간의 관측된 변동이 기대 변동과 일치하지 않는 경우를 설명하기 위한 것이 있습니다. 기본 결점 또는 불량품 비율의 작은 변화는 일반적으로 모든 공정에서 발생합니다. 부분군 크기가 상대적으로 작은 경우 부분군의 표본 추출 변동이 이러한 작은 변화를 인지할 수 없을 정도로 충분히 큽니다. 부분군 크기가 증가하면 표본 추출 변동이 감소하고 기본 결점 또는 불량품 비율의 작은 변화가 잘못된 경고 비율을 증가시켜 표준 P 및 U 관리도에 역효과를 미칠 정도로 충분히 커집니다. 일부 예를 보면 잘못된 경고 비율이 70%까지 커집니다. 이 조건은 과대산포로 알려져 있습니다.

이 문제를 해결하기 위해 부분군 p 또는 u 값을 정규화하고 정규화된 데이터를 I 관리도에 표시하는 방법이 개발되었습니다. I 관리도에서는 정규화된 값의 이동 범위를 사용하여 관리 한계를 결정합니다. 따라서 I 관리도 방법은 한 부분군의 불량품 또는 결점 비율의 변동을 다음 부분군에 추가하여 일반 원인 변동의 정의를 변경합니다.

Laney 방법은 데이터를 원래 단위로 변환합니다. 이 방법의 장점은 모든 부분군의 크기가 같지 않을 경우 관리 한계가 I 관리도에서처럼 고정되지 않는다는 것입니다.

P' 및 U' 관리도는 새로운 일반 원인 변동의 정의를 크기가 다른 여러 부분군에서 예상할 수 있는 가변 관리 한계와 결합합니다. 따라서 이러한 관리도의 기본 가정은 일반 원인 변동의 정의가 변경된다는 것입니다. 여기에는 부분군 내 존재하는 일상적인 단기 변동 및 연속된 부분군 간에 관측될 것으로 예상되는 평균 단기 변동이 포함됩니다.

## Laney P' 관리도

다음과 같이 설정합니다.

$X_i$  = 부분군 내 불량품의 수

$n_i$  = 부분군 i의 부분군 크기

$p_i$  = 부분군 i의 불량품 비율

$$\bar{p} = \frac{\sum X_i}{\sum n_i}$$

$$\sigma p_i = \sqrt{\frac{\bar{p} * (1 - \bar{p})}{n_i}}$$

먼저  $p_i$ 를 z-점수로 변환합니다.

$$Z_i = \frac{p_i - \bar{p}}{\sigma p_i}$$

그런 다음, 길이 2의 이동 범위를 사용하여 z-점수의 변동을 평가하고 시그마 Z( $\sigma_z$ )를 계산합니다.

$$\sigma_z = \frac{\overline{MR}}{1.128}$$

여기서 1.128은 불편화 상수입니다.

데이터를 원래 척도로 다시 변환합니다.

$$p_i = \bar{p} + \sigma p_i * \sigma z$$

따라서  $p_i$ 의 표준 편차는 다음과 같습니다.

$$sd(p_i) = \sigma p_i * \sigma z$$

관리 한계와 중심선은 다음과 같이 계산됩니다.

$$\text{중심선} = \bar{p}$$

$$UCL = \bar{p} + 3 * sd(p_i)$$

$$LCL = \bar{p} - 3 * sd(p_i)$$

## Laney U' 관리도

다음과 같이 설정합니다.

$X_i$  = 부분군 내 불량품의 수

$n_i$  = 부분군  $i$ 의 부분군 크기

$u_i$  = 부분군  $i$ 의 불량품 비율

$$\bar{u} = \frac{\sum X_i}{\sum n_i}$$

$$\sigma u_i = \sqrt{\frac{\bar{u} * (1 - \bar{u})}{n_i}}$$

먼저  $p_i$ 를  $z$ -점수로 변환합니다.

$$Z_i = \frac{u_i - \bar{u}}{\sigma u_i}$$

그런 다음, 길이 2의 이동 범위를 사용하여  $z$ -점수의 변동을 평가하고 시그마  $Z(\sigma z)$ 를 계산합니다.

$$\sigma z = \frac{\overline{MR}}{1.128}$$

여기서 1.128은 불편화 상수입니다.

데이터를 원래 척도로 다시 변환합니다.

$$u_i = \bar{u} + \sigma u * \sigma z$$

따라서  $p_i$ 의 표준 편차는 다음과 같습니다.

$$sd(u_i) = \sigma_{u_i} * \sigma_z$$

관리 한계와 중심선은 다음과 같이 계산됩니다.

$$\text{중심선} = \bar{u}$$

$$\text{UCL} = \bar{u} + 3 * sd(u_i)$$

$$\text{LCL} = \bar{u} - 3 * sd(u_i)$$

© 2020 Minitab, LLC. All rights reserved. Minitab®, Minitab Workspace™, Companion by Minitab®, Salford Predictive Modeler®, SPM®, and the Minitab® logo are all registered trademarks of Minitab, LLC, in the United States and other countries. Additional trademarks of Minitab, LLC can be found at [www.minitab.com](http://www.minitab.com). All other marks referenced remain the property of their respective owners.