

# 計量管理図

## 概要

管理図は、工程を定期的に監視して正常な管理状態にあるかどうかを判断するために使用されます。Minitab アシスタントには、連続データに対してもっとも広く使われている 2 つの管理図が含まれています。

- Xbar-R または Xbar-S 管理図：これらの管理図は、データがサブグループ単位で収集されるときに使用されます。Minitab は、併合標準偏差を使用してサブグループ内標準偏差を推定します。R 管理図は、サイズが約 10 までのサブグループの変動を効果的に推定します (AIAG, 1995, Montgomery, 2001)。これより大きいサブグループサイズの場合、S 管理図の方が適切に個別のサブグループ内標準偏差を推定します。Minitab の従来のやり方と控え目に考え、サブグループサイズが 8 より大きい場合は S 管理図を使用することをお勧めします。サブグループサイズが 8 以下の場合、R 管理図と S 管理図の結果は似たような結果になります。
- 個別および移動範囲 (I-MR) 管理図：この管理図は、サブグループが存在しない場合に使用されます。Minitab は、長さ 2 の平均移動範囲法を使用して標準偏差を推定します。

通常、管理図の管理限界は Six Sigma プロジェクトの管理段階で設定されます。適切な管理図は、特殊原因が存在する場合は敏感に反応してすばやく信号を出します。この感度は、特殊原因の信号を出すために必要な平均サブグループ数を計算することで評価できます。さらに、適切な管理図は、工程が正常に管理されている場合に「誤った警告」を出すことはほとんどありません。誤った警告の割合は、工程が正常に管理されている場合に「管理外」と見なすサブグループの割合を計算することで評価できます。

一般に、各観測値が正規分散から取得される独立した値で、サブグループ内に普通原因による変動性のみが存在する場合、管理図が最適化されます。そのため、アシスタントレポートカードは次のデータチェックを自動的に実行し、これらの条件をチェックします。

- 正規性
- 安定性
- データ量
- 関連データ

本書では、条件が異なる場合に計量管理図がどのように動作するかを調査し、これらの条件の要件を評価する一連のガイドラインをどのように確立したかについて説明します。

# データチェック

## 正規性

管理図は、工程データが正規分布に従うという仮定には基づきませんが、特別原因のテストに使用される基準はこの仮定に基づいています。データが大きく歪んでいる場合、またはデータの分布の両端が急激に下降する（「裾が重い」）場合、テスト結果は不正確な可能性があります。たとえば、管理図が期待されるよりも高い割合で誤った警告の信号を出す場合があります。

### 目的

Xbar 管理図と I 管理図での非正規データの影響を調査します。非正規性が誤った警告の割合にどのように影響するかを判断します。具体的には、非正規データによって、工程が実際に正常に管理されている場合に点が管理外であると管理図に示される割合（誤った警告の割合）が有意に高くなるかどうかを判断します。

### 方法

10,000 個のサブグループとさまざまな水準の非正規性を使用してシミュレーションを実行し、誤った警告の割合を記録しました。シミュレーションでは、非正規性の影響を判断するさまざまな条件をテストできます。実際には右に歪んだ分布と重い裾を持つ対称的な分布が一般的な非正規分布であるため、ここではその 2 つの分布を選択しました。詳細は、「付録 A」を参照してください。

### 結果

#### XBAR 管理図（サブグループサイズ $\geq 2$ ）

このシミュレーションでは、サブグループサイズが 2 以上でデータが非正規の場合、誤った警告の割合が有意に高くなることはないと示されています。この結果に基づき、Xbar-R 管理図または Xbar-S 管理図の正規性はチェックしません。データが大きく歪んでいたり裾が極端に重い場合でも、テスト 1 とテスト 2 の誤った警告の割合は 2% 以下で、正規分布での誤った警告の割合である 0.7% よりも目立って高くはありません。

#### I 管理図（サブグループサイズ = 1）

このシミュレーションでは、I 管理図は非正規データの影響を受けやすいことが示されています。データが非正規である場合、I 管理図での誤った警告の割合はデータが正規の場合に比べて 4~5 倍高くなっています。I 管理図の非正規データに対する感度の問題に対応するため、アシスタントでは次のことが実行されます。

- 管理限界外にある点の数が期待されるより大きい（点の数が 2 以上、または管理限界外にある点の割合が 2% 以上である）ことによってデータが非正規である可能性が示されている場合、Anderson-Darling 検定を実行します。
- Anderson-Darling 検定でデータが非正規であることが示された場合、アシスタントは最適な Box-Cox  $\lambda$  を使用してデータを変換します。次に、変換されたデータで Anderson-Darling 検定が実行されます。その検定で（データは正規であるという）

帰無仮説を棄却できない場合、アシスタントは、工程で非正規データが自然に生成される場合は変換されたデータを使用することを提案します。

Box-Cox 変換は、右に歪んだ非正規データでのみ有効です。変換が有効でない非正規データでは、他の方法を検討する必要があります。さらに、Anderson-Darling 検定と Box-Cox 変換は極端な観測値によって影響されるため、データを変換する前に、既知の特別原因に関連する点は除外する必要があります。

正規性をチェックするときに、I 管理図のアシスタントレポートカードに次のステータスインジケータが表示されます。

ステータス	状態
	I 管理図の、管理限界外にある点の数が 2 未満、または点の割合が 2%未満の場合。 または データまたは Box-Cox 変換されたデータの Anderson-Darling 正規性検定が $\alpha = 0.01$ で（データが正規であるという）帰無仮説を棄却できない場合。
	上記の状態ではない場合。

## 安定性

計量管理図では、8つのテストを実行して工程の安定性を評価できます。これらのテストを同時に使用することで、管理図の感度を高めることができます。ただし、管理図にテストを追加するたびに誤った警告の割合が増えるため、各テストの目的と付加価値を考慮することが重要です。

### 目的

安定性に対する8つのテストのうち、どのテストをアシスタントの計量管理図に含めるかを決定しようと考えました。1つ目の目的は、誤った警告の割合をあまり増やすことなく、管理図の状態に対する感度を大幅に高めるテストを特定することです。2つ目の目的は、管理図の簡易性と実用性を確保することです。この調査は Xbar 管理図と I 管理図のテストに焦点を当てています。R、S、および MR 管理図では、点が管理限界外にある場合に信号を出す、テスト 1のみを使用します。

### 方法

シミュレーションを実行して文献を調査し、安定性に対するテストの組み合わせが管理図の感度および誤った警告の割合にどのように影響するかを評価しました。さらに、テストに関連する特殊原因の存在も評価しました。各テストで使用された方法の詳細は、次の「結果」セクションと「付録 B」を参照してください。

### 結果

Xbar 管理図と I 管理図の安定性の評価には、テスト 1、2、および 7 が最も役立つことがわかりました。

#### テスト 1: 管理限界外の点を識別する

テスト 1 は、中心線からの距離が 3 標準偏差を超えている点を識別します。テスト 1 は管理外の状態の検出に必要であると広く認められています。この誤った警告の割合はほんの 0.27% です。

#### テスト 2: 平均のシフトを識別する

テスト 2 は、連続する 9 点が中心線に対して同じ側にある場合に信号を出します。標準偏差の倍数に設定された 4 つの異なる平均を使用してシミュレーションを実行し、信号の検出に必要なサブグループ数を判断しました。正規分布に基づいて管理限界を設定しました。テスト 2 を追加することで、平均の小さなシフトに対する管理図の検出感度が大幅に高まることになりました。テスト 1 とテスト 2 を併用した場合、テスト 1 のみを使用した場合に比べて平均の小さなシフトの検出に必要なサブグループ数は激減します。そのため、テスト 2 の追加は一般的な管理外の状況の検出に役立ち、誤った警告の割合が大きく増えることなく感度を高めることができます。

#### テスト 7: 広すぎる管理限界を識別する

テスト 7 は、連続する 12~15 点が中心線から 1 標準偏差内にある場合に信号を出します。このテストは、管理限界がデータから推定されるときに XBar 管理図のみで使用されます。通常、このテストに失敗する原因は、サブグループ内の系統的な変動要因（層別）にあり、多くの場合、合理的なサブグループが形成されていないことにより発生します。合理的なサブグループの形成は管理図が管理外の状況を正確に検出するために不可欠であるため、Minitab はデータから管理限界を推定するときに修正されたテスト 7 を使用します。テスト 7 は、サブグループ数に応じて、連続する点の数が 12~15 の場合に失敗の信号を出します。

$k = (\text{サブグループ数}) \times 0.33$	必要な点の数
$k < 12$	12
$k \geq 12$ および $k \leq 15$	$k$ 以上の整数
$k > 15$	15

## アシスタントには含まれていないテスト

#### テスト 3: 連続する K 点がすべて増加または減少している

テスト 3 は、工程平均のドリフトを検出するように設計されています (Davis and Woodall, 1988)。ただし、テスト 1 とテスト 2 に加えてテスト 3 を使用した場合、工程平均のドリフトに対する管理図の感度はそれほど高まりません。なぜならば、シミュレーションの結果に基づいてテスト 1 とテスト 2 の使用をすでに決定しているため、テスト 3 を含めても管理図に大きな付加価値がもたらされることはありません。

#### テスト 4: 連続する K 点が交互に増減している

このパターンは実際に発生する可能性があります、一定のパターンをテストする代わりに異常な傾向やパターンを探すことが推奨されます。

テスト 5:  $K + 1$  点のうち  $K$  点の中心線からの距離が 2 標準偏差を超えている

管理図を簡単にするため、このテストは除外しました。このテストでは、実際によくある特殊原因の状況を一意に特定できませんでした。

テスト 6:  $K + 1$  点の内  $K$  点の中心線からの距離が 1 標準偏差を超えている

管理図を簡単にするため、このテストは除外しました。このテストでは、実際によくある特殊原因の状況を一意に特定できませんでした。

テスト 8: 連続する  $K$  点の中心線からの距離が 1 標準偏差を超えている

管理図を簡単にするため、このテストは除外しました。このテストでは、実際によくある特別原因の状況を一意に特定できませんでした。

安定性をチェックするときに、アシスタントレポートカードに次のステータスインジケータが表示されます。

ステータス	状態
	<p>平均の管理図（I 管理図または Xbar 管理図）と変動の管理図（MR、R、または S 管理図）で不良となったテストはありません。</p> <p>各管理図に使用されるテストは次のとおりです。</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• I 管理図: テスト 1 およびテスト 2。</li><li>• Xbar 管理図: テスト 1、テスト 2、およびテスト 7。テスト 7 は管理限界がデータから推定される場合にのみ実行されます。</li><li>• MR、R、および S 管理図: テスト 1。</li></ul>
	<p>上記の状態ではない場合。</p>

## データ量

既知の管理限界の値がない場合は、データから推定する必要があります。限界の正確な推定値を得るには、十分なデータ量が必要です。データ量が不足している場合、サンプリング変動性が原因で管理限界は「真の」限界とはほど遠くなる可能性があります。限界の精度を上げるには、観測値数を増やします。

### 目的

正確な管理限界を得るために必要な観測値数を調査しました。テスト 1 による誤った警告の割合が 95%信頼区間で 1%以下になるために必要なデータ量を判断します。

### 方法

データが正規分布に従っていてサンプリング変動性に起因する誤差がない場合、上側管理限界外の点の割合は 0.135%です。観測値数が適切であるかどうかを判断するため、Bischak (2007) で概説された方法に従い、上側管理限界外の点に起因する誤った警告の割合が 95%信頼区間で 0.5%以下になるようにしました。管理限界には対称性があるため、この方法で

のテスト 1 による誤った警告の割合の合計は 1% になります。詳細は、「付録 C」を参照してください。

## 結果

ほぼすべてのサブグループサイズで、合計で 100 観測値が正確な管理限界の取得に適切であると判断しました。1 や 2 のサブグループサイズではこれよりも若干多い観測値数が必要ですが、100 観測値数でも誤った警告の割合は適度に低くなっています (1.1%)。したがって、簡単にするため、合計 100 の観測値数を切り捨て値として、すべてのサブグループサイズで使用します。

これらの結果に基づき、データ量をチェックするときに、アシスタントレポートカードに次のステータスインジケータが表示されます。

ステータス	状態
	観測値数 ≥ 100。
	観測値数 < 100。

## 相関データ

自己相関は、時系列に沿って収集されたデータ点間の独立性の測度です。ほとんどの工程データでは、少なくとも小程度の自己相関が示されます。自己相関が中程度か高い場合、テスト結果が不正確になる可能性があります。通常、自己相関のあるデータは正の自己相関を示し、その結果サブグループ内変動が減少し、誤った警告の割合が高くなる可能性があります。

### 目的

自己相関と誤った警告の割合の関係を調査します。許容できない誤った警告の割合を発生させる自己相関の水準を判断することを目的としています。遅れ 1 の自己相関は遅れが 2 以上の自己相関よりも大きくなる可能性が高いため、単純に遅れ 1 の自己相関のみを考慮します。

### 方法

自己相関のある工程の標準モデルを使用し、3 つのサブグループサイズ ( $n = 1, 3, 5$ ) に対して  $\phi = 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8$  ( $\phi$  は遅れ 1 の自己相関) のシミュレーションを実行しました。初期設定の 10,000 個のサブグループを使用して管理限界を設定してから、2,500 個の追加サブグループでの誤った警告の割合を記録しました。次に、10,000 回の反復を行い、誤った警告の平均割合を記録しました。詳細は、「付録 D」を参照してください。

## 結果

このシミュレーションでは、中程度の水準の自己相関でも誤った警告の割合が有意に高くなることが示されています。自己相関が 0.4 以上の場合、誤った警告の割合は非常に高く、管理図が無意味になります。この問題に対応するため、管理限界外にある点の数が期待されるより大きい (点の数が 2 以上および管理限界外にある点の割合が 2% 以上である) ことによってデータが自己相関を有する可能性が示されている場合、アシスタントは自己相関検定を

実行します。この場合、アシスタントは最初に連続するデータ点間の自己相関（遅れ= 1）が0.2より有意に大きいかどうかを検定します。自己相関が0.2より有意に大きい場合、連続するデータ点間の自己相関（遅れ= 1）が0.4より有意に大きいかどうかを検定します。

相関データをチェックするときに、アシスタントレポートカードに次のステータスインジケータが表示されます。

ステータス	状態
	<p>管理限界外にある点の数が予期される値より低い、つまり2点未満であるか、2%未満です。</p> <p>管理限界外にある点の数は期待される数より大きくなっていますが、自己相関= 0.2 対自己相関 &gt; 0.2 の検定が <math>\alpha = 0.01</math> で帰無仮説を棄却できません。したがって、少なくとも中程度の水準の自己相関が存在すると結論付けるのに十分な証拠がありません。</p>
	<p>上記の状態ではない場合。</p> <p>注：自己相関= 0.2 の帰無仮説が棄却される場合、自己相関= 0.4 対自己相関 &gt; 0.4 の検定を実行します。自己相関= 0.4 の検定が棄却される場合、警告メッセージの重大度が高くなります。</p>

自己相関の仮説検定についての詳細は、「付録 D」を参照してください。

# 参考文献

- AIAG (1995). *Statistical process control (SPC) reference manual*. Automotive Industry Action Group.
- Bischak, D.P., & Trietsch, D. (2007). The rate of false signals in  $\bar{X}$  control charts with estimated limits. *Journal of Quality Technology*, 39, 55-65.
- Bowerman, B.L., & O'Connell, R.T. (1979). *Forecasting and time series: An applied approach*. Belmont, CA: Duxbury Press.
- Chan, L. K., Hapuarachchi K. P., & Macpherson, B.D. (1988). Robustness of  $\bar{X}$  and  $R$  charts. *IEEE Transactions on Reliability*, 37, 117-123.
- Davis, R.B., & Woodall, W.H. (1988). Performance of the control chart trend rule under linear shift. *Journal of Quality Technology*, 20, 260-262.
- Montgomery, D. (2001). *Introduction to statistical quality control*, 4<sup>th</sup> edition. John Wiley & Sons.
- Schilling, E.G., & Nelson, P.R. (1976). The effect of non-normality on the control limits of  $\bar{X}$  charts. *Journal of Quality Technology*, 8, 183-188.
- Trietsch, D. (1999). *Statistical quality control: A loss minimization approach*. Singapore: World Scientific Publishing Company.
- Wheeler, D.J. (2004). *Advanced topics in statistical process control. The power of Shewhart's charts*, 2<sup>nd</sup> edition. Knoxville, TN: SPC Press.
- Yourstone, S.A., & Zimmer, W.J. (1992). Non-normality and the design of control charts for averages. *Decision Sciences*, 23, 1099-1113.

# 付録 A: 正規性

## シミュレーション A1: 誤った警告の割合に対して非正規性が及ぼす影響

非正規データが I 管理図と Xbar 管理図の性能にどのように影響するかを調査するため、非正規データ分布に関連する誤った警告の割合を評価するシミュレーションを実行しました。実際には右に歪んだ分布と重い裾を持つ対称な分布が一般的な非正規分布であるため、ここではその 2 つの分布に注目しました。具体的には、3 つの歪んでいる分布（自由度が 3、5、10 のカイ二乗分布）と 2 つの裾が重い分布（自由度が 3 および 5 の t 分布）を調べました。

初期設定の 10,000 個のサブグループを使用して管理限界を設定してから、2,500 個の追加サブグループでの誤った警告の割合を記録しました。次に、10,000 回の反復を行い、特殊原因に対するテスト 1 とテスト 2 での誤った警告の平均割合を計算しました。この結果を表 1 に示します。

表 1 I 管理図 (n = 1) および Xbar 管理図 (n = 2、3、4、5) に対するテスト 1、テスト 2 での誤った警告の%

分布	サブグループサイズ				
	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
N(0, 1)	0.27, 0.39	0.27, 0.39	0.27, 0.39	0.27, 0.39	0.27, 0.39
Chi (3)	2.06, 1.17	1.18, 0.79	0.98, 0.62	0.86, 0.57	0.77, 0.53
Chi (5)	1.54, 0.83	0.93, 0.60	0.77, 0.53	0.67, 0.50	0.61, 0.47
Chi (10)	1.05, 0.60	0.67, 0.50	0.56, 0.46	0.50, 0.44	0.45, 0.43
t (3)	2.18, 0.39	1.30, 0.39	1.22, 0.39	1.16, 0.39	1.11, 0.39
t (5)	1.43, 0.39	0.93, 0.39	0.80, 0.39	0.71, 0.39	0.66, 0.39

表 1 の各セルは、それぞれテスト 1 とテスト 2 で計算された誤った警告の割合を示していません。たとえば、標準正規分布 (N(0, 1)) と I 管理図 (n = 1) に関連付けられたセルは、データが正規分布に従っている場合、I 管理図での誤った警告の割合はテスト 1 の場合は 0.27%、テスト 2 の場合は 0.39%であることを示しています。

Xbar 管理図 (n = 2、3、4、5) の誤った警告の割合を正規分布と非正規分布間で比較すると、正規性の仮定に違反している場合は誤った警告の割合が有意に高くなるのがわかります。大きく歪んでいる分布（カイ二乗、3）や裾が重い分布（t、3）でも、テスト 1 とテスト 2 の組み合わせによる誤った警告の割合は、サブグループサイズが 2 の大きさを 2.0%未満です（一方、正規分布では 0.7%）。したがって、事実上 Xbar 管理図は正規性の仮定の違反に対して頑健であると結論付けることができます。

I 管理図では、分布が大きく歪んでいる（カイ二乗、3）場合のテスト 1 とテスト 2 の組み合わせによる誤った警告の割合は、約 3.2%であることが表 1 に示されています。この誤っ

た警告の割合は、データが正規分布に従っている場合に期待される誤った警告の割合のほぼ 5 倍です。分布の裾が重い (t, 3) 場合のテスト 1 とテスト 2 の組み合わせによる誤った警告の割合は 2.6%で、データが正規分布に従っている場合に期待される割合のほぼ 4 倍です。

したがって、I-MR 管理図のデータは最初に正規性を検定する必要があります。正規性に対する Anderson-Darling 適合度検定の帰無仮説が棄却される (データが正規分布に従っていないという統計的に有意な証拠がある) 場合、Box-Cox 変換を使用してデータを正規化できます。ただし、Box-Cox 変換は右に歪んだデータでのみ有効です。その他の非正規データの場合、追跡調査を行って最善策を見つけ出す必要があります。さらに、Anderson-Darling 検定と Box-Cox 変換は極端な観測値によって影響されるため、分析を実行する前に、既知の特別原因に関連する点は計算から除外する必要があります。

# 付録 B: 安定性

## シミュレーション B1: テスト 2 のテスト 1 への追加による感度への影響

テスト 1 は、点の中心線からの距離が 3 標準偏差を超えている場合に信号を出すことで、管理外の点を検出します。テスト 2 は、連続する 9 点が中心線に対して同じ側にある場合に信号を出すことで、平均のシフトを検出します。

テスト 1 とテスト 2 を併用することで平均管理図 (I 管理図と Xbar 管理図) の感度が改善されるかどうかを評価するため、正規分布 (0, SD) の管理限界を設定しました。標準偏差の倍数で分布の平均をシフトしてから、10,000 回の反復それぞれで信号を検出するために必要なサブグループ数を記録しました。この結果を表 2 に示します。

表 2 テスト 1 で不良 (テスト 1)、テスト 2 で不良 (テスト 2)、テスト 1 またはテスト 2 で不良 (テスト 1 または 2) になるまでの平均サブグループ数。平均のシフトは標準偏差 (SD) の倍数で、シミュレーションはサブグループサイズ (n) = 1、3、および 5 で実行されました。

シフト	n = 1			n = 3			n = 5		
	テスト 1	テスト 2	テスト 1 または 2	テスト 1	テスト 2	テスト 1 または 2	テスト 1	テスト 2	テスト 1 または 2
0.5 SD	154	84	57	60	31	22	33	19	14
1 SD	44	24	17	10	11	7	4	10	4
1.5 SD	15	13	9	3	9	3	1.6	9	1.6
2 SD	6	10	5	1.5	9	1.5	1.1	9	1.1

I 管理図 (n = 1) の結果に示されるように、0.5 標準偏差の平均のシフトを検出するには、テスト 1 を使用した場合は平均 154 サブグループが必要であるのに対して、両方のテストを使用した場合 (「テスト 1 または 2」列) は平均 57 サブグループで済みます。同様に、両方のテストを使用することで、Xbar 管理図 (n = 3, n = 5) の感度を高めることができます。たとえば、大きさ 3 のサブグループで、0.5 標準偏差のシフトを検出するためには、テスト 1 のみを使用した場合は平均 60 サブグループが必要であったのに対して、テスト 1 とテスト 2 の両方を使用した場合は平均 22 サブグループで済みます。したがって、テスト 1 とテスト 2 の両方のテストを使用することで、平均の僅かなシフトに対しても検出感度が大幅に高まります。ただし、シフトが大きくなるにつれ、テスト 2 を追加しても感度はそれほど高まらなくなります。

## シミュレーション B2: テスト 7 による層別（サブグループ内の変動性の複数の要因）の検出の効率性

通常、テスト 7 は、連続する 12～15 点が中心線から 1 標準偏差内にある場合に不良の信号を出します。アシスタントは、データ内のサブグループ数に基づいて必要な点の数を調整するように修正された規則を使用します。表 3 に示すように、 $k = (\text{サブグループ数} \times 0.33)$  と設定し、テスト 7 が不良となるために必要な連続する点の数を定義します。

表 3 テスト 7 が不良となるために必要な連続する点の数

$k = (\text{サブグループ数}) \times 0.33$	必要な点の数
$k < 12$	12
$k \geq 12$ および $k \leq 15$	$k$ 以上の整数
$k > 15$	15

管理限界を設定するための一般的なシナリオで、上記の基準を使用してシミュレーションを実行し、テスト 7 が不良の信号を出す尤度を判断しました。具体的には、データから管理限界が推定される段階での層別の検出規則を評価しました。

標準偏差 (SD) を持つ正規分布から、サイズ  $n$  の  $m$  個のサブグループをランダムに選択しました。各サブグループの点の半数の平均は 0 に等しく、残りの半数の平均は SD シフト (0 SD、1 SD、または 2 SD) に等しくなっています。10,000 回の反復を行い、表 4 に示すように、テスト 7 で 1 回以上信号が出された管理図の割合を記録しました。

表 4 テスト 7 から 1 つ以上の信号が出される管理図の割合

サブグループ数		$m = 50$	$m = 75$	$m = 25$	$m = 38$	$m = 25$
サブグループサイズ		$n = 2$	$n = 2$	$n = 4$	$n = 4$	$n = 6$
テスト		連続する 15 点	連続する 15 点	連続する 12 点	連続する 13 点	連続する 12 点
シフト	0 SD	5%	8%	7%	8%	7%
	1 SD	23%	33%	17%	20%	15%
	2 SD	83%	94%	56%	66%	50%

表の 1 番目の「シフト」行 (シフト = 0 SD) に示されるように、層別がない場合、テスト 7 で 1 回以上不良のある管理図の割合は比較的低くなっています。一方、層別がある場合 (シフト = 1 SD またはシフト = 2 SD)、テスト 7 で 1 回以上不良のある管理図の割合ははるかに高く、94% にまで達しています。このため、テスト 7 での管理限界の推定段階で層化を特定できます。

# 付録 C: データ量

## 計算式 C1: 上側管理限界の 95%信頼区間に基づいて必要となる観測値数

データが正規分布に従っておりサンプリング変動性に起因する誤差がない場合、管理状態にある工程での上側管理限界外の観測値数の割合は 0.135%です。誤った警告の割合をある程度低くするために十分な観測値数があるかどうかを判断するため、Bischak (2007) の方法に従い、上側管理限界の 95%下側信頼限界を次のように計算します。

$$UCL_L = \hat{\mu} + \frac{h}{w_p}$$

ここで

$\hat{\mu}$  = 中心線の推定値

$h = 3 \sigma$

$$w_p = 1 - \frac{z_p \sqrt{1 - c_4^2}}{c_4 \sqrt{\frac{n}{k}}}$$

$c_4$  = Xbar 管理図の不偏化のための定数

$n$  = 観測値数

$k$  = サブグループサイズ

$z_p$  = 平均 = 0、標準偏差 = 1 の正規分布の  $p = 0.95$  で評価される逆累積分布関数

$\frac{h}{w_p} = 2.65 \sigma$  に設定しました。これにより、上側管理限界外の誤った警告の割合は 0.5% になり、 $n$  が計算されます。

I 管理図では、長さ 2 の平均移動範囲を使用して  $\sigma$  を推定するため、単にサブグループサイズが 2 の Xbar 管理図からの観測値数を使用して、必要なデータ量を判断します。これらの計算に基づくさまざまなサブグループサイズで必要な観測値数を表 5 に示します。

表 5 さまざまなサブグループサイズで必要な観測値数

サブグループサイズ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
観測値数	114	114	84	72	70	66	63	64	63	60	66	60	65	56	60

注 サブグループサイズが大きくなるにつれて観測値数は少なくなるはずですが、表 8 にはこの規則の例外が含まれています。これらの例外は、必要な観測値数の合計を計算するために、サブグループ数に各サブグループの観測値数を掛けますが、その際、計算の前にサブグループ数を四捨五入し整数にするために生ずるものです。

表5の結果では、必要な観測値数の合計は、1および2以外のすべてのサブグループサイズで100以下になっています。サブグループサイズが1または2の場合でも、100観測値数での誤った警告の割合は約1.1%のみです。そのため、100観測値数がすべてのサブグループサイズで有効な切り捨て値になります。

上記の分析は、各サブグループの普通原因による変動量が同じであると仮定しています。実際には、異なる時点で収集されたデータは、普通原因による変動量が異なる可能性があります。したがって、工程変動の代表的推定を得る機会を増やすため、より多くの時点で工程のサンプルを抽出することもできます。

# 付録 D: 自己相関

## シミュレーション D1: 誤った警告の割合に対して自己相関が及ぼす影響

次のモデルを使用して、自己相関のある工程を定義しました。

$$x_t = \mu + \phi(x_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$$

ここで

$x_t$  = 時間  $t$  での観測値

$\mu$  = 工程平均

$\phi$  = 連続する 2 つの点の相関

$\varepsilon_t$  = 時間  $t$  での誤差項、 $\varepsilon \sim N(0, 1)$

遅れ 1 の自己相関は遅れが 2 以上の自己相関よりも大きくなる可能性が高いため、単純に遅れ 1 の自己相関のみを考慮します。

上記のモデルを使用して、 $\phi = 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8$  および 3 つのサブグループサイズ ( $n = 1, 3, 5$ ) でシミュレーションを実行しました。初期設定の 10,000 個のサブグループを使用して管理限界を設定してから、2,500 個の追加サブグループでの誤った警告の割合を記録しました。次に、自己相関とサブグループサイズの各組み合わせに対するテスト 1 とテスト 2 を使用して、10,000 回の反復を行い、誤った警告の平均割合を記録しました。この結果を次の表 6 に示します。

表 6 自己相関 ( $\phi$ ) およびサブグループサイズ ( $n$ ) に対する工程のテスト 1、テスト 2 での誤った警告の平均割合

サブグループサイズ	$\phi$				
	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8
n = 1	0.73, 1.08	2.01, 2.99	3.38, 4.98	5.77, 8.34	17.94, 23.83
n = 3	1.48, 0.57	5.35, 0.98	9.07, 1.39	14.59, 2.19	33.91, 7.91
n = 5	1.49, 0.50	5.48, 0.68	9.40, 0.86	15.24, 1.18	35.52, 3.84

$\phi$  の値が大きくなるにつれ、誤った警告の割合が高くなっています。実際に、中程度の水準の自己相関 ( $\phi = 0.4$ ) でも、誤った警告の割合は有意に高くなっています。自己相関が 0.4 以上の場合、管理図にはこのような高い割合の誤った警告が表示され、管理図がほとんど無意味になります。

## 計算式 D1: 自己相関の検定

データ内の自己相関  $\phi$  の水準を判断するため、Bowerman (1979) の方法に従い、次の検定統計量を使用して  $\phi = r$  の帰無仮説対  $\phi > r$  の対立仮説を評価する検定を実行します。

$$z = \frac{(\hat{\phi} - r)}{se_{\hat{\phi}}}$$

ここで

$$\hat{\phi} = \frac{1}{m \hat{\sigma}} \sum_{i=1}^{m-1} (x_i - \mu)(x_{i+1} - \mu)$$

$m$  = 観測値数

$\hat{\sigma}$  = サンプル分散

$$se_{\hat{\phi}} = \sqrt{m}$$

Xbar 管理図でデータの自己相関を計算する場合、サブグループの最後の点と次のサブグループの最初の点の間の相互依存性を排除します。これは、これらの点の比較を含めると、自己相関の推定値が低くなってしまうためです。Bowerman (1979) の方法に従い、標準正規分布に基づいて p 値を計算します。