

## INFORME TÉCNICO SOBRE EL ASISTENTE DE MINITAB

Este documento forma parte de un conjunto de informes técnicos que explican la investigación llevada a cabo por los especialistas en estadística de Minitab para desarrollar los métodos y las verificaciones de datos que se utilizan en el Asistente de Minitab Statistical Software.

# Gráficas de control de variables

## Revisión general

Las gráficas de control se utilizan para monitorear regularmente un proceso para determinar si está bajo control. El Asistente de Minitab incluye dos de las gráficas de control que más se utilizan para los datos continuos:

- Gráficas Xbarra-R o Xbarra-S. Estas gráficas se utilizan cuando los datos se recolectan en subgrupos. Minitab utiliza la desviación estándar agrupada para estimar la desviación estándar dentro de los subgrupos. La gráfica R provee una estimación efectiva de la variación para subgrupos con un tamaño de hasta aproximadamente 10 (AIAG, 1995; Montgomery, 2001). Para subgrupos de mayor tamaño, una gráfica S provee una mejor estimación de la desviación estándar individual dentro de los subgrupos. Para seguir las convenciones anteriores de Minitab y para ser conservadores, recomendamos el uso de una gráfica S cuando el tamaño del subgrupo es mayor que 8. Para subgrupos con un tamaño menor que o igual a 8, las gráficas R y S proveen resultados similares.
- Gráfica de observaciones individuales y rango móvil (I-MR). Esta gráfica se utiliza cuando no existen subgrupos. Minitab utiliza un método de rango móvil promedio con una longitud de 2 para estimar la desviación estándar.

Los límites de control de una gráfica de control normalmente se establecen en la fase de control de un proyecto Six Sigma. Una gráfica de control adecuada debe ser lo suficientemente sensible como para señalar rápidamente cuando existe una causa especial. Esa sensibilidad puede evaluarse calculando el número promedio de subgrupos necesarios para señalar una causa especial. Además, una gráfica de control adecuada raramente señala una "falsa alarma" cuando el proceso está bajo control. La tasa de falsas alarmas puede evaluarse calculando el porcentaje de subgrupos que se considera "fuera de control" cuando el proceso está bajo control.

En general, las gráficas de control se optimizan cuando cada observación proviene de una distribución normal, cada observación es independiente y solo existe variabilidad por causa común dentro de los subgrupos. Por lo tanto, la Tarjeta de informe del Asistente realiza automáticamente las siguientes verificaciones de los datos para evaluar esas condiciones:

- Normalidad
- Estabilidad
- Cantidad de datos
- Datos correlacionados

En este trabajo, investigamos cómo se comporta una gráfica de control de variables cuando varían esas condiciones y describimos cómo establecimos un conjunto de directrices para evaluar los requisitos de tales condiciones.

# Verificaciones de datos

## Normalidad

Las gráficas de control no se basan en el supuesto de que los datos del proceso están distribuidos normalmente, pero los criterios que se utilizan en las pruebas para detectar causas especiales se basan en este supuesto. Si los datos son muy asimétricos o si hay demasiados datos en los extremos de la distribución (“colas pesadas”), es posible que los resultados de la prueba no sean exactos. Por ejemplo, la gráfica podría indicar falsas alarmas a una tasa más alta de lo esperado.

### Objetivo

Investigamos el efecto de los datos no normales en la gráfica Xbarra y la gráfica I. Queríamos determinar de qué manera la no normalidad afecta la tasa de falsas alarmas. Específicamente, queríamos determinar si los datos no normales aumentan significativamente la tasa a la que una gráfica indica que los puntos están fuera de control cuando el proceso está bajo control (falsas alarmas).

### Método

Realizamos simulaciones con 10,000 subgrupos y diferentes niveles de no normalidad y registramos el porcentaje de falsas alarmas. Las simulaciones nos permiten poner a prueba diferentes condiciones para determinar los efectos de la no normalidad. Elegimos la distribución asimétrica hacia la derecha y distribuciones simétricas con colas pesadas porque son casos comunes de distribuciones no normales en la práctica. Para obtener más detalles, consulte el Apéndice A.

### Resultados

#### GRÁFICA XBARRA (TAMAÑO DEL SUBGRUPO $\geq 2$ )

Nuestra simulación reveló que la tasa de falsas alarmas no aumenta significativamente cuando los datos no son normales si el tamaño del subgrupo es 2 o más. Basándonos en este resultado, no verificamos la normalidad para las gráficas Xbarra-R o Xbarra-S. Incluso cuando los datos son sumamente asimétricos o forman colas muy pesadas, la tasa de falsas alarmas de la prueba 1 y la prueba 2 es menor que 2%, que no es notablemente superior a la tasa de falsas alarmas de 0.7% de la distribución normal.

#### GRÁFICA I (TAMAÑO DEL SUBGRUPO = 1)

Nuestra simulación reveló que la gráfica I es sensible a los datos no normales. Cuando los datos no son normales, la gráfica I produce una tasa de falsas alarmas de 4 a 5 veces más alta que cuando los datos son normales. Para resolver la sensibilidad de la gráfica a los datos no normales, el Asistente hace lo siguiente:

- Realiza una prueba de Anderson-Darling por si los datos pudieran presentar un alto grado de no normalidad, según lo indicado por un número de puntos fuera de los límites de control mayor de lo esperado (es decir, 2 o más puntos y 2% o más de los puntos están fuera de los límites del control).
- Si la prueba de Anderson-Darling sugiere que los datos no son normales, el Asistente transforma los datos utilizando el lambda óptimo de Box-Cox. Se realiza una prueba de Anderson-Darling en los datos transformados. Si la prueba no puede rechazar la hipótesis nula (de que los datos son normales), el Asistente sugiere usar los datos transformados si el proceso produce datos no normales de manera natural.

La transformación de Box-Cox solo es efectiva para datos no normales que son asimétricos hacia la derecha. Si la transformación no es efectiva para sus datos no normales, podría tener que considerar otras opciones. Además, como la prueba de Anderson-Darling y la transformación de Box-Cox se ven afectadas por las observaciones extremas, debe omitir los puntos con causas especiales conocidas antes de transformar sus datos.

Al verificar la normalidad, la Tarjera de informe del Asistente para la gráfica I muestra los siguientes indicadores de estado:

Estado	Condición
	<p>Si <math>&lt; 2</math> puntos o <math>&lt; 2\%</math> de los puntos están fuera de los límites de control en la gráfica I</p> <p>o</p> <p>La prueba de normalidad de Anderson-Darling para los datos originales o para los datos transformados con Box-Cox no puede rechazar la hipótesis nula (de que los datos son normales) en el nivel de significancia = 0.01.</p>
	<p>Si no se cumplen las condiciones anteriores.</p>

## Estabilidad

Para las gráficas de control de variables, pueden realizarse ocho pruebas para evaluar la estabilidad del proceso. Si estas pruebas se usan de manera simultánea, aumenta la sensibilidad de la gráfica de control. Sin embargo, es importante determinar el propósito y el valor agregado de cada prueba, porque la tasa de falsas alarmas aumenta a medida que se agregan más pruebas a la gráfica de control.

### Objetivo

Queríamos determinar cuáles de las ocho pruebas de estabilidad debían incluirse en el Asistente con las gráficas de control de variables. Nuestro primer objetivo era identificar las pruebas que aumentan significativamente la sensibilidad a las condiciones fuera de control sin aumentar significativamente la tasa de falsas alarmas. Nuestro segundo objetivo era asegurar la simplicidad y el sentido práctico de la gráfica. Nuestra investigación se centró en las pruebas

para la gráfica Xbarra y la gráfica I. Para las gráficas R, S y MR solo utilizamos la prueba 1, que señala cuando un punto se encuentra fuera de los límites del control.

## Método

Realizamos simulaciones y revisamos la bibliografía para evaluar de qué manera el uso de una combinación de pruebas de estabilidad afecta la sensibilidad y la tasa de falsas alarmas de las gráficas de control. Además, evaluamos la prevalencia de causas especiales asociadas con la prueba. Para obtener detalles sobre los métodos utilizados para cada prueba, consulte la sección Resultados, a continuación, y el Apéndice B.

## Resultados

Descubrimos que las pruebas 1, 2 y 7 eran las más útiles para evaluar la estabilidad de la gráfica Xbarra y la gráfica I:

### **PRUEBA 1: IDENTIFICA LOS PUNTOS QUE ESTÁN FUERA DE LOS LÍMITES DEL CONTROL**

La prueba 1 identifica los puntos  $> 3$  desviaciones estándar desde la línea central. La prueba 1 se reconoce universalmente como una prueba necesaria para detectar situaciones fuera de control. Tiene una tasa de falsas alarmas de tan solo 0.27%.

### **PRUEBA 2: IDENTIFICA LOS CAMBIOS EN LAS MEDIAS**

La prueba 2 señala cuando 9 puntos consecutivos se encuentran en el mismo lado de la línea central. Realizamos una simulación usando 4 medias diferentes, establecidas en múltiplos de la desviación estándar, y determinamos el número de subgrupos necesarios para detectar una señal. Establecimos los límites del control con base en la distribución normal. Descubrimos que al agregar la prueba 2, aumenta significativamente la sensibilidad de la gráfica para detectar pequeños cambios en la media. Cuando se utilizan al mismo tiempo la prueba 1 y la prueba 2, se necesitan significativamente menos subgrupos para detectar un pequeño cambio en la media que cuando se usa la prueba 1 solamente. Por lo tanto, cuando se agrega la prueba 2, pueden detectarse con más facilidad situaciones comunes fuera de control y la sensibilidad aumenta lo suficiente para justificar un ligero aumento en la tasa de falsas alarmas.

## PRUEBA 7: IDENTIFICA LOS LÍMITES DE CONTROL QUE SON DEMASIADO AMPLIOS

La prueba 7 señala cuando de 12 a 15 puntos consecutivos están dentro de 1 desviación estándar de la línea central. La prueba 7 solo se utiliza para la gráfica XBarra cuando los límites del control se calculan a partir de los datos. Cuando esta prueba falla, la causa suele ser una fuente de variación (estratificación) sistémica dentro de un subgrupo, lo que con frecuencia se debe a la no formación de subgrupos racionales. Debido a que formar subgrupos racionales resulta crítico para garantizar que la gráfica de control pueda detectar con exactitud las situaciones fuera de control, Minitab utiliza una prueba 7 modificada cuando estima los límites de control a partir de los datos. La prueba 7 señala una falla cuando el número de puntos consecutivos está entre 12 y 15, dependiendo del número de subgrupos:

<b>k = (Número de subgrupos) x 0.33</b>	<b>Puntos necesarios</b>
$k < 12$	12
$k \geq 12$ y $k \leq 15$	Entero $\geq k$
$k > 15$	15

## Pruebas no incluidas en el Asistente

### PRUEBA 3: K PUNTOS CONSECUTIVOS, EN ORDEN CRECIENTE O DECRECIENTE

La prueba 3 está diseñada para detectar cambios graduales en la media del proceso (Davis y Woodall, 1988). Sin embargo, cuando la prueba 3 se utiliza además de la prueba 1 y la prueba 2, no aumenta significativamente la sensibilidad de la gráfica para detectar cambios graduales en la media del proceso. Puesto que ya decidimos utilizar las pruebas 1 y 2, con base en los resultados de la simulación, incluir la prueba 3 no agregaría ningún valor significativo a la gráfica.

### PRUEBA 4: K PUNTOS CONSECUTIVOS, ALTERNADOS HACIA ARRIBA Y HACIA ABAJO

Aunque este patrón puede ocurrir en la práctica, recomendamos buscar tendencias o patrones poco comunes en lugar de realizar una prueba para detectar un patrón específico.

### PRUEBA 5: K DE K=1 PUNTOS > 2 DESVIACIONES ESTÁNDAR DESDE LA LÍNEA CENTRAL

Para asegurar la simplicidad de la gráfica, excluimos esta prueba porque no identificó de manera única situaciones de causa especial que son comunes en la práctica.

### PRUEBA 6: K DE K+1 PUNTOS > 1 DESVIACIÓN ESTÁNDAR DESDE LA LÍNEA CENTRAL

Para asegurar la simplicidad de la gráfica, excluimos esta prueba porque no identificó de manera única situaciones de causa especial que son comunes en la práctica.

## PRUEBA 8: K PUNTOS CONSECUTIVOS > 1 DESVIACIÓN ESTÁNDAR DESDE LA LÍNEA CENTRAL (CUALQUIER LADO)

Para asegurar la simplicidad de la gráfica, excluimos esta prueba porque no identificó de manera única situaciones de causa especial que son comunes en la práctica.

Al verificar la estabilidad, la Tarjeta de informe del Asistente muestra los siguientes indicadores de estado:

Estado	Condición
	<p>Ninguna prueba falla en la gráfica de la media (gráfica I o gráfica Xbarra) ni en la gráfica de variación (gráfica MR, R o S).</p> <p>Las pruebas utilizadas para cada gráfica son:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• Gráfica I: prueba 1 y prueba 2.</li><li>• Gráfica Xbarra: prueba 1, prueba 2 y prueba 7. La prueba 7 solo se realiza cuando los límites de control se calculan a partir de los datos.</li><li>• Gráficas MR, R y S: prueba 1.</li></ul>
	<p>Si no se cumple la condición anterior.</p>

## Cantidad de datos

Si usted no tiene valores conocidos para los límites de control, éstos deben calcularse a partir de los datos. Para obtener estimaciones precisas de los límites, debe tener datos suficientes. Si la cantidad de datos es insuficiente, los límites de control pueden estar lejos de los límites “verdaderos” debido a la variabilidad del muestreo. Para mejorar la precisión de los límites, puede aumentar el número de observaciones.

### Objetivo

Investigamos el número de observaciones que se necesita para obtener límites de control precisos. Nuestro objetivo era determinar la cantidad de datos que se necesita para asegurar, con un 95% de confianza, que las falsas alarmas debido a la prueba 1 no representen más del 1%.

### Método

Cuando los datos están distribuidos normalmente y no hay error debido a la variabilidad del muestreo, el porcentaje de puntos por encima del límite de control superior es 0.135%. Para determinar si el número de observaciones es adecuado, seguimos el método descrito por Bischak (2007) para asegurar que la tasa de falsas alarmas debido a puntos situados por encima del límite de control superior no sea más de 0.5% con un 95% de confianza. Debido a la simetría de los límites del control, este método da como resultado una tasa total de falsas alarmas de 1% debido a la prueba 1. Para obtener más detalles, consulte el Apéndice C.

## Resultados

Determinamos que, para casi todos los tamaños de subgrupo, un total de 100 observaciones es adecuado para obtener límites de control precisos. Aunque los subgrupos con un tamaño de 1 y 2 requerían ligeramente más observaciones, la tasa de falsas alarmas seguía siendo razonablemente baja (1.1%) con 100 observaciones. Por lo tanto, por razones de simplicidad, utilizamos el límite de 100 observaciones en total para todos los tamaños de subgrupo.

Con base en estos resultados, la Tarjeta de informe del Asistente muestra los siguientes indicadores de estado cuando se verifica la cantidad de datos:

Estado	Condición
	Número de observaciones $\geq 100$ .
	Número de observaciones $< 100$ .

## Datos correlacionados

La autocorrelación es una medida de la dependencia entre los puntos de los datos que se recolectan con el tiempo. La mayoría de los datos de un proceso exhibe por lo menos un pequeño grado de autocorrelación. Si la autocorrelación es moderada o alta, puede conducir a resultados incorrectos. Normalmente, los datos autocorrelacionados exhiben autocorrelación positiva, lo que puede reducir la variación dentro de los subgrupos y conducir a una tasa más alta de falsas alarmas.

### Objetivo

Investigamos la relación entre la autocorrelación y la tasa de falsas alarmas. Nuestro objetivo era determinar el nivel de autocorrelación que genera una tasa inaceptable de falsas alarmas. Por razones de simplicidad, consideramos la autocorrelación de desfase 1, porque es probable que la autocorrelación de desfase 1 sea mayor que la autocorrelación de desfase  $\geq 2$ .

### Método

Utilizado un modelo estándar para un proceso autocorrelacionado, realizamos simulaciones con  $\phi = 0.2, 0.4, 0.5, 0.6$  y  $0.8$  ( $\phi$  es la autocorrelación de desfase 1) para tres tamaños de subgrupo ( $n = 1, 3$  y  $5$ ). Utilizamos un conjunto inicial de 10,000 subgrupos para establecer los límites del control. Posteriormente, registramos el porcentaje de falsas alarmas para 2,500 subgrupos adicionales. Realizamos 10,000 iteraciones y registramos el porcentaje promedio de falsas alarmas. Para obtener más detalles, consulte el Apéndice D.

## Resultados

Nuestras simulaciones revelaron que la tasa de falsas alarmas aumenta significativamente incluso con niveles moderados de autocorrelación. Cuando la autocorrelación  $\geq 0.4$ , la tasa de falsas alarmas es muy alta y la gráfica de control se vuelve insignificante. Para resolver este problema, el Asistente realiza una prueba de autocorrelación si los datos pueden estar autocorrelacionados, según lo indicado por un número mayor de lo esperado de puntos fuera de los límites de control (cuando 2 o más puntos o 2% o más de los puntos están fuera de los límites del control). En ese caso, el Asistente primero comprueba si la autocorrelación entre puntos sucesivos de los datos (desfase 1) es significativamente mayor que 0.2. Si la autocorrelación es significativamente mayor que 0.2, entonces el Asistente comprueba si la autocorrelación entre puntos sucesivos de los de datos (desfase 1) es significativamente mayor que 0.4.

Al verificar si existen datos correlacionados, la Tarjeta de informe del Asistente muestra los siguientes indicadores de estado:

Estado	Condición
	<p>El número de puntos fuera de los límites de control no es mayor de lo esperado; es decir, <math>&lt; 2</math> puntos o <math>&lt; 2\%</math> de los puntos están fuera de los límites del control.</p> <p>El número de puntos fuera de los límites de control es mayor de lo esperado, pero una prueba de autocorrelación = 0.2 vs. autocorrelación <math>&gt; 0.2</math> no puede rechazar la hipótesis nula en el nivel de significancia = 0.01. Por lo tanto, no hay suficiente evidencia para concluir que existe al menos un nivel moderado de autocorrelación.</p>
	<p>Si no se cumplen las condiciones anteriores.</p> <p>Nota: Si se rechaza la hipótesis nula de que la autocorrelación = 0.2, realizamos una prueba de seguimiento de autocorrelación = 0.4 vs. autocorrelación <math>&gt; 0.4</math>. Si se rechaza la prueba de autocorrelación = 0.4, aumentamos la severidad del mensaje de precaución.</p>

Para obtener más detalles sobre la prueba de hipótesis para autocorrelación, consulte el Apéndice D.

# Referencias

- AIAG (1995). *Statistical Process Control (SPC) reference manual*. Automotive Industry Action Group.
- Bischak, D.P. y Trietsch, D. (2007). The rate of false signals in  $\bar{X}$  control charts with estimated limits. *Journal of Quality Technology*, 39, 55–65.
- Bowerman, B.L. y O'Connell, R.T. (1979). *Forecasting and time series: An applied approach*. Belmont, CA: Duxbury Press.
- Chan, L. K., Hapuarachchi K. P. y Macpherson, B.D. (1988). Robustness of  $\bar{X}$  and  $R$  charts. *IEEE Transactions on Reliability*, 37, 117–123.
- Davis, R.B. y Woodall, W.H. (1988). Performance of the control chart trend rule under linear shift. *Journal of Quality Technology*, 20, 260–262.
- Montgomery, D. (2001). *Introduction to statistical quality control*, 4<sup>th</sup> edition. John Wiley & Sons.
- Schilling, E.G. y Nelson, P.R. (1976). The effect of non-normality on the control limits of  $\bar{X}$  charts. *Journal of Quality Technology*, 8, 183–188.
- Trietsch, D. (1999). *Statistical quality control: A loss minimization approach*. Singapore: World Scientific Publishing Company.
- Wheeler, D.J. (2004). *Advanced topics in statistical process control. The power of Shewhart's charts*, 2<sup>nd</sup> edition. Knoxville, TN: SPC Press.
- Yourstone, S.A. y Zimmer, W.J. (1992). Non-normality and the design of control charts for averages. *Decision Sciences*, 23, 1099–1113.

# Apéndice A: Normalidad

## Simulación A1: Qué efecto tiene la no normalidad en la tasa de falsas alarmas

Para investigar de qué manera los datos no normales afectan el rendimiento de la gráfica I y la gráfica Xbarra, realizamos una simulación para evaluar la tasa de falsas alarmas asociada con las distribuciones de datos no normales. Centramos nuestra atención en distribuciones asimétricas hacia la derecha y distribuciones simétricas con colas pesadas, porque son distribuciones no normales comunes en la práctica. En particular, examinamos 3 distribuciones asimétricas (chi-cuadrado con  $gl=3, 5$  y  $10$ ) y 2 distribuciones de colas pesadas ( $t$  con  $gl=3$  y  $5$ ).

Establecimos los límites de control usando un conjunto inicial de 10,000 subgrupos. Registramos el porcentaje de falsas alarmas para 2,500 subgrupos adicionales. Luego realizamos 10,000 iteraciones y calculamos el porcentaje promedio de falsas alarmas usando la prueba 1 y la prueba 2 para detectar causas especiales. Los resultados se muestran en la tabla 1.

**Tabla 1** % de falsas alarmas para la prueba 1 y la prueba 2 para la gráfica I ( $n=1$ ) y la gráfica Xbarra ( $n=2, 3, 4$  ó  $5$ )

Distribución	Tamaño del subgrupo				
	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
Normal (0,1)	0.27, 0.39	0.27, 0.39	0.27, 0.39	0.27, 0.39	0.27, 0.39
Chi (3)	2.06, 1.17	1.18, 0.79	0.98, 0.62	0.86, 0.57	0.77, 0.53
Chi (5)	1.54, 0.83	0.93, 0.60	0.77, 0.53	0.67, 0.50	0.61, 0.47
Chi (10)	1.05, 0.60	0.67, 0.50	0.56, 0.46	0.50, 0.44	0.45, 0.43
t (3)	2.18, 0.39	1.30, 0.39	1.22, 0.39	1.16, 0.39	1.11, 0.39
t (5)	1.43, 0.39	0.93, 0.39	0.80, 0.39	0.71, 0.39	0.66, 0.39

Cada celda de la tabla 1 indica la tasa calculada de falsas alarmas para la prueba 1 y la prueba 2, respectivamente. Por ejemplo, la celda asociada con la distribución normal estándar (Normal (0, 1)) y la gráfica I ( $n=1$ ) indica que la gráfica I tiene una tasa de falsas alarmas de 0.27% para la prueba 1 y 0.39% para la prueba 2 cuando los datos están distribuidos normalmente.

Al comparar las tasas de falsas alarmas para la gráfica Xbarra ( $n=2, 3, 4, 5$ ) entre las distribuciones normal y no normal, se puede ver que la tasa de falsas alarmas no aumenta significativamente cuando se viola el supuesto de normalidad. Incluso con distribuciones muy asimétricas (chi-cuadrado, 3) y distribuciones con colas pesadas ( $t, 3$ ), la tasa de falsas alarmas

para la prueba 1 y la prueba 2 combinadas es menos de 2.0% (comparada con la tasa de 0.7% para una distribución normal) para tamaños de subgrupo tan pequeños como 2. Por lo tanto, concluimos con fines prácticos que la gráfica Xbarra es robusta ante las violaciones del supuesto de normalidad.

Para la gráfica I, la tabla 1 muestra una tasa de falsas alarmas de aproximadamente 3.2% para la prueba 1 y la prueba 2 combinadas cuando la distribución es muy asimétrica (chi-cuadrado, 3); esta tasa de falsas alarmas es casi 5 veces mayor que la tasa esperada de falsas alarmas cuando los datos están distribuidos normalmente. La tasa de falsas alarmas para la prueba 1 y la prueba 2 combinadas es de 2.6% para distribuciones con colas pesadas (t, 3), que es casi 4 veces la tasa esperada cuando los datos están distribuidos normalmente.

Por lo tanto, los datos para la gráfica I-MR deben evaluarse primero para determinar si son normales. Si se rechaza la hipótesis nula de la prueba de bondad de ajuste de Anderson-Darling para evaluar la normalidad (hay evidencia estadísticamente significativa de que los datos no siguen una distribución normal), puede usarse una transformación de Box-Cox para normalizar los datos. Sin embargo, la transformación de Box-Cox solo es efectiva cuando los datos son asimétricos hacia la derecha. Para otros casos de datos no normales, se debe investigar más a fondo para determinar el mejor curso de acción. Además, como la prueba de Anderson-Darling y la transformación de Box-Cox se ven afectadas por las observaciones extremas, los puntos con causas especiales conocidas deben excluirse de los cálculos antes de realizar el análisis.

# Apéndice B: Estabilidad

## Simulación B1: Qué efecto tiene en la sensibilidad la adición de la prueba 2 a la prueba 1

La prueba 1 detecta puntos fuera de control señalando cuando un punto está a más de 3 desviaciones estándar de la línea central. La prueba 2 detecta cambios en la media señalando cuando 9 puntos consecutivos se ubican en el mismo lado de la línea central.

Para evaluar si el hecho de usar la prueba 2 junto con la prueba 1 mejora la sensibilidad de las gráficas de las medias (gráfica I y gráfica Xbarra), establecimos los límites de control para una distribución normal (0, DE). Desplazamos la media de la distribución en un múltiplo de la desviación estándar y luego registramos el número de subgrupos necesarios para detectar una señal para cada una de las 10,000 iteraciones. Los resultados se muestran en la tabla 2.

Tabla 2 Número promedio de subgrupos hasta una falla de la prueba 1 (prueba 1), una falla de la prueba 2 (prueba 2) o una falla de la prueba 1 o la prueba 2 (prueba 1 ó 2). El cambio en la media es igual a un múltiplo de la desviación estándar (DE) y la simulación se realizó para los tamaños de subgrupo (n) = 1, 3 y 5.

Cambio	n=1			n=3			n=5		
	Prueba 1	Prueba 2	Prueba 1 ó 2	Prueba 1	Prueba 2	Prueba 1 ó 2	Prueba 1	Prueba 2	Prueba 1 ó 2
0.5 DE	154	84	57	60	31	22	33	19	14
1 DE	44	24	17	10	11	7	4	10	4
1.5 DE	15	13	9	3	9	3	1.6	9	1.6
2 DE	6	10	5	1.5	9	1.5	1.1	9	1.1

Como se observa en los resultados de la gráfica I (n=1), cuando se usan ambas pruebas (columna Prueba 1 ó 2), se necesita un promedio de 57 subgrupos para detectar un cambio de 0.5 desviaciones estándar en la media, en comparación con el promedio de 154 subgrupos necesarios para detectar un cambio de 0.5 desviaciones estándar cuando se usa la prueba 1 solamente. Del mismo modo, cuando se usan ambas pruebas, aumenta la sensibilidad para la gráfica Xbarra (n=3, n=5). Por ejemplo, para un tamaño de subgrupo de 3, se necesita un promedio de 22 subgrupos para detectar un cambio de 0.5 desviaciones estándar cuando se usan la prueba 1 y la prueba 2, mientras que para detectar un cambio de 0.5 desviaciones estándar cuando solo se utiliza la prueba 1, se necesitan 60 subgrupos. Por lo tanto, el uso de ambas pruebas aumenta significativamente la sensibilidad para detectar pequeños cambios en

la media. A medida que aumenta el tamaño del cambio, la adición de la prueba 2 no aumenta significativamente la sensibilidad.

## Simulación B2: ¿Qué tan efectiva es la prueba 7 para detectar la estratificación (múltiples fuentes de variabilidad en los subgrupos)?

La prueba 7 por lo general señala una falla cuando entre 12 y 15 puntos consecutivos se encuentran dentro de 1 desviación estándar de la línea central. El Asistente utiliza una regla modificada que ajusta el número de puntos necesarios con base en el número de subgrupos que hay en los datos. Establecimos  $k = (\text{número de subgrupos} * 0.33)$  y definimos los puntos consecutivos necesarios para una falla de la prueba 7 como se muestra en la tabla 3.

**Tabla 3** Puntos consecutivos necesarios para una falla de la prueba 7

<b>k = (Número de subgrupos) x 0.33</b>	<b>Puntos necesarios</b>
$k < 12$	12
$k \geq 12$ y $k \leq 15$	Entero $\geq k$
$k > 15$	15

Usando escenarios comunes para establecer los límites de control, realizamos una simulación para determinar la probabilidad de que la prueba 7 señalara una falla utilizando los criterios indicados arriba. Específicamente, queríamos evaluar la regla para detectar estratificación durante la fase en la que los límites de control se estiman a partir de los datos.

Elegimos de forma aleatoria  $m$  subgrupos con un tamaño de  $n$  de una distribución normal con una desviación estándar (DE). La mitad de los puntos de cada subgrupo tenía una media igual a 0 y la otra mitad tenía una media igual al cambio de DE (0 DE, 1 DE o 2 DE). Realizamos 10,000 iteraciones y registramos el porcentaje de gráficas que mostraron al menos una señal de la prueba 7, como se muestra en la tabla 4.

**Tabla 4** Porcentaje de gráficas que tienen al menos una señal de la prueba 7

<b>Número de subgrupos</b>		<b>m = 50</b>	<b>m = 75</b>	<b>m = 25</b>	<b>m = 38</b>	<b>m = 25</b>
<b>Tamaño del subgrupo</b>		<b>n = 2</b>	<b>n = 2</b>	<b>n = 4</b>	<b>n = 4</b>	<b>n = 6</b>
<b>Prueba</b>		<b>15 consecutivos</b>	<b>15 consecutivos</b>	<b>12 consecutivos</b>	<b>13 consecutivos</b>	<b>12 consecutivos</b>
<b>Cambio</b>	<b>0 DE</b>	5%	8%	7%	8%	7%
	<b>1 DE</b>	23%	33%	17%	20%	15%

<b>Número de subgrupos</b>	<b>m = 50</b>	<b>m = 75</b>	<b>m = 25</b>	<b>m = 38</b>	<b>m = 25</b>
<b>Tamaño del subgrupo</b>	<b>n = 2</b>	<b>n = 2</b>	<b>n = 4</b>	<b>n = 4</b>	<b>n = 6</b>
<b>Prueba</b>	<b>15 consecutivos</b>	<b>15 consecutivos</b>	<b>12 consecutivos</b>	<b>13 consecutivos</b>	<b>12 consecutivos</b>
<b>2 DE</b>	83%	94%	56%	66%	50%

Como se observa en la primera fila de Cambio en la tabla (cambio = 0 DE), cuando no hay estratificación, un porcentaje relativamente pequeño de gráficas tiene al menos una falla de la prueba 7. Sin embargo, cuando hay estratificación (cambio = 1 DE o cambio = 2 DE), un porcentaje mucho más elevado de las gráficas—hasta el 94%—tiene al menos una falla de la prueba 7. De esta manera, la prueba 7 puede identificar la estratificación durante la fase en la cual se estiman los límites del control.

# Apéndice C: Cantidad de datos

## Fórmula C1: Número de observaciones necesarias con base en un IC de 95% para el límite de control superior

Cuando los datos están distribuidos normalmente y no hay error debido a la variabilidad del muestreo, el porcentaje de observaciones por encima del límite de control superior es de 0.135% para un proceso bajo control. Para determinar si hay suficientes observaciones para asegurar que la tasa de falsas alarmas permanezca razonablemente baja, seguimos a Bischak (2007) y calculamos un límite de confianza inferior de 95% para el límite de control superior de la siguiente manera:

$$LCS_L = \hat{\mu} + \frac{h}{w_p}$$

donde

$\hat{\mu}$  = estimación de la línea central

$h = 3 \sigma$

$$w_p = 1 - \frac{z_p \sqrt{1 - c_4^2}}{c_4 \sqrt{\frac{n}{k}}}$$

$c_4$  = constante de eliminación de sesgo para una gráfica Xbarra

$n$  = número de observaciones

$k$  = tamaño del subgrupo

$z_p$  = cdf inversa evaluada a  $p = 0.95$  para la distribución Normal con media = 0 y desviación estándar = 1

Establecemos  $\frac{h}{w_p} = 2.65 \sigma$ , que produce una tasa de falsas alarmas de 0.5% por encima del límite de control superior, y resolvemos  $n$ .

Para la gráfica I, estimamos  $\sigma$  usando un rango de promedio móvil de longitud 2; por lo tanto, simplemente usamos el número de observaciones de la gráfica Xbarra con tamaño de subgrupo igual a 2 para determinar la cantidad de datos necesarios. Con base en estos cálculos, el número de observaciones necesarias para diferentes tamaños de subgrupo se muestra en la tabla 5.

**Tabla 5** Número de observaciones necesarias para diferentes tamaños de subgrupo

<b>Tamaño del subgrupo</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>
<b>Número de observaciones</b>	114	114	84	72	70	66	63	64	63	60	66	60	65	56	60

**Nota** El número de observaciones debe disminuir a medida que aumenta el tamaño del subgrupo. Sin embargo, algunas excepciones a esta regla pueden verse en la tabla 8. Estas excepciones ocurren porque el número de subgrupos se redondeó al siguiente entero antes de ser multiplicado por el número de observaciones en cada subgrupo, con el fin de calcular el número total de observaciones necesarias.

Los resultados de la tabla 5 muestran que el número total de observaciones necesarias es menor que o igual a 100 para todos los tamaños de subgrupo, excepto cuando el tamaño del subgrupo es 1 ó 2. Sin embargo, incluso cuando el tamaño del subgrupo es 1 ó 2, la tasa de falsas alarmas es solo aproximadamente de 1.1% con 100 observaciones. Por lo tanto, 100 observaciones es un valor de corte efectivo para todos los tamaños de subgrupo.

El análisis anterior asume que cada subgrupo tendrá la misma cantidad de variación de causa común. En la práctica, los datos recogidos en diferentes puntos en el tiempo pueden tener diferentes cantidades de la variabilidad de causa común. Por lo tanto, convendría muestrear el proceso en más puntos temporales de lo necesario para aumentar las probabilidades de tener una estimación representativa de la variación del proceso.

# Apéndice D: Autocorrelación

## Simulación D1: Qué efecto tiene la autocorrelación en la tasa de falsas alarmas

Definimos un proceso autocorrelacionado utilizando el siguiente modelo:

$$x_t = \mu + \phi (x_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$$

donde

$x_t$  = Observación en el tiempo t

$\mu$  = media del proceso

$\phi$  = correlación entre dos puntos consecutivos

$\varepsilon_t$  término de error en el tiempo t;  $\varepsilon \sim \text{Normal}(0, 1)$

Por razones de simplicidad, solo consideramos la autocorrelación de desfase 1, porque es probable que la autocorrelación de desfase 1 sea mayor que la autocorrelación de desfases  $\geq 2$ .

Usando el modelo anterior, realizamos una simulación con  $\phi = 0.2, 0.4, 0.5, 0.6$  y  $0.8$  y con tres tamaños de subgrupo ( $n=1, 3$  y  $5$ ). Usamos un conjunto inicial de 10,000 subgrupos para establecer los límites de control y luego registramos el porcentaje de falsas alarmas para 2,500 subgrupos adicionales. Realizamos 10,000 iteraciones y registramos el porcentaje promedio de falsas alarmas usando la prueba 1 y la prueba 2 para cada combinación de autocorrelación y tamaño de subgrupo. Los resultados se muestran abajo en la tabla 6.

**Tabla 6** Porcentaje promedio de falsas alarmas para la prueba 1 y la prueba 2 para un proceso con autocorrelación ( $\phi$ ) y tamaño de subgrupo ( $n$ )

	$\phi$				
Tamaño del subgrupo	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8
<b>n = 1</b>	0.73, 1.08	2.01, 2.99	3.38, 4.98	5.77, 8.34	17.94, 23.83
<b>n = 3</b>	1.48, 0.57	5.35, 0.98	9.07, 1.39	14.59, 2.19	33.91, 7.91
<b>n = 5</b>	1.49, 0.50	5.48, 0.68	9.40, 0.86	15.24, 1.18	35.52, 3.84

Observe que a medida que el valor de  $\phi$  aumenta, la tasa de falsas alarmas aumenta. De hecho, incluso los niveles moderados de autocorrelación ( $\phi = 0.4$ ) conducen a aumentos significativos en la tasa de falsas alarmas. Cuando la autocorrelación es  $\geq 0.4$ , la gráfica de control muestra un porcentaje tan grande de falsas alarmas que los resultados de la gráfica son casi insignificantes.

## Fórmula D1: Prueba de autocorrelación

Para determinar el nivel de autocorrelación  $\phi$  en los datos, seguimos a Bowerman (1979) y realizamos una prueba para evaluar la hipótesis nula de  $\phi = r$  vs. la hipótesis alternativa de  $\phi > r$  usando el siguiente estadístico de prueba:

$$z = \frac{(\hat{\phi} - r)}{se_{\hat{\phi}}}$$

donde

$$\hat{\phi} = \frac{1}{m \hat{\sigma}} \sum_{i=1}^{m-1} (x_i - \mu)(x_{i+1} - \mu)$$

$m$  = número de observaciones

$\hat{\sigma}$  = varianza de la muestra

$$se_{\hat{\phi}} = \sqrt{m}$$

Al calcular la autocorrelación de los datos en las gráficas Xbarra, no incluimos la dependencia entre el último punto de un subgrupo y el primer punto del siguiente subgrupo, porque incluir esas comparaciones conduciría a una subestimación de la autocorrelación. Siguiendo a Bowerman (1979), calculamos el valor p con base en una distribución normal estándar.